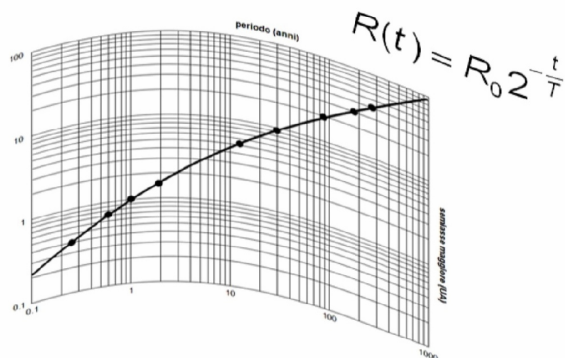


*Il professor Apotema insegna...*

# LE FUNZIONI LINEARI ESPONENZIALI LOGARITMICHE E POTENZE



$$f(x) = y_1 \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$$

$$\dots, c-2d, c-d, c, c+d, c+2d, \dots$$

**Giorgio Goldoni**



*Ciò che seminai nell'ira  
crebbe in una notte,  
rigogliosamente,  
ma la pioggia lo distrusse.*

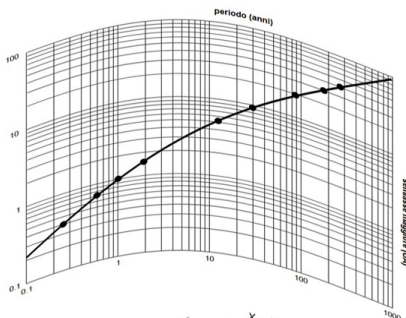
*Ciò che seminai con amore  
germinò lentamente,  
maturò tardi,  
ma in benedetta abbondanza.*

*Peter Rosegger*



***Il professor Apotema insegna ...***

# **LE FUNZIONI LINEARI ESPONENZIALI LOGARITMICHE E POTENZE**



$$f(x) = y_1 \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}$$
$$R(t) = R_0 2^{-\frac{t}{T}}$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$$

$$\dots, c-2d, c-d, c, c+d, c+2d, \dots$$

***Giorgio Goldoni***

***realizzazione e impaginazione***  
***a cura di Giorgio Goldoni***  
***1ª edizione: Rolo, giugno 2011***  
***2ª edizione: Modena, novembre 2012***  
***3ª edizione: Modena, marzo 2014***

*Dedico questo lavoro a tutti i miei studenti che, in oltre trent'anni di insegnamento, diligenti o svogliati, attenti o distratti, studiosi o fannulloni, sono comunque stati e restano la principale fonte di ispirazione per le mie lezioni.*



## **CONTENUTO DELLE LEZIONI**

### **LEZIONE I.....pag.1**

*Progressioni aritmetiche e geometriche - Funzioni lineari e loro definizione in termini di progressioni - Moto rettilineo uniforme - Inserimento di un medio aritmetico - Algoritmo per il calcolo di una funzione lineare mediante l'inserimento di medi - Funzioni esponenziali e loro definizione in termini di progressioni - Decadimento radioattivo.*

### **LEZIONE II.....pag.15**

*Inserimento di un medio geometrico - Algoritmo per il calcolo di una funzione esponenziale mediante l'inserimento di medi - Funzioni logaritmiche e loro definizione in termini di progressioni - Algoritmo per il calcolo di una funzione logaritmica mediante l'inserimento di medi - Attenuazione luminosa e legge di Lambert-Beer.*

### **LEZIONE III.....pag.25**

*Attenuazione luminosa e legge di Lambert-Beer - Funzioni potenze e loro definizione in termini di progressioni - Algoritmo per il calcolo di una funzione potenza mediante l'inserimento di medi - La III legge di Keplero.*

### **LEZIONE IV.....pag.33**

*Funzioni lineari pure - Forma della funzione lineare che manda una data progressione aritmetica in un'altra - Il moto rettilineo uniforme - Forma della funzione lineare per due punti - Forma generale di una funzione lineare.*

### **LEZIONE V.....pag.43**

*Composizione di due funzioni lineari - Inversa di una funzione lineare - Funzioni esponenziali pure - Proprietà delle funzioni esponenziali pure - Forma generale di una funzione esponenziale.*

### **LEZIONE VI.....pag.55**

*Forma della funzione esponenziale che manda una data*

*progressione aritmetica in una data progressione geometrica - Il decadimento radioattivo - Le legge di Lambert-Beer - Forma della funzione esponenziale per due punti - Disuguaglianza tra la media aritmetica e geometrica - Grafici delle funzioni esponenziali.*

### **LEZIONE VII.....pag.67**

*Composizione di una funzione lineare con una esponenziale - I grafici delle funzioni esponenziali - Funzioni logaritmiche pure e loro proprietà.*

### **LEZIONE VIII.....pag.79**

*Formule per il cambio di base per le funzioni esponenziali e logaritmiche - Numero di cifre della rappresentazione di un numero naturale in basi diverse - Forma della funzione logaritmica che manda una data progressione geometrica in una data progressione aritmetica - Forma generale di una funzione logaritmica.*

### **LEZIONE IX.....pag.89**

*Forma della funzione logaritmica per due punti - Composizione di una funzione logaritmica con una funzione lineare - Composizione di una funzione esponenziale con una logaritmica e viceversa - La legge psicofisica di Fechner e Weber - Le magnitudini stellari apparenti.*

### **LEZIONE X.....pag.101**

*Le magnitudini stellari apparenti - Le funzioni potenze pure - Forma generale di una funzione potenza - Forma della funzione potenza che manda una data progressione geometrica in un'altra - L'esponente della III legge di Keplero - Forma della funzione potenza per due punti - Forma della funzione lineare pura per un punto.*

### **LEZIONE XI.....pag.109**

*Forma della funzione esponenziale pura per un punto - Forma della funzione logaritmica pura per un punto - Forma della funzione potenza pura per un punto - Il linguaggio causa/effetto per le funzioni - Caratterizzazione delle funzioni lineari pure in termini di causa ed effetto - Il principio di sovrapposizione degli effetti per i circuiti in corrente continua - La legge di Hooke - L'area del rettangolo.*

**LEZIONE XII.....pag.121**

*I grafici delle funzioni potenze - La composizione di due funzioni potenze - La composizione di una funzione potenza con una funzione logaritmica - La composizione di una funzione esponenziale con una funzione potenza - Caratterizzazione delle funzioni esponenziali pure in termini di causa ed effetto - Un problema di probabilità e La legge di Lambert-Beer descritti in termini di causa ed effetto - La costante di raddoppiamento e di dimezzamento per le funzioni esponenziali crescenti e decrescenti.*

**LEZIONE XIII.....pag.135**

*La legge del decadimento radioattivo e la sua descrizione in termini di causa ed effetto - Costanti di triplicazione, quadruplicazione, ecc. e loro relazioni - Il problema della base migliore - Introduzione al numero di Nepero.*

**LEZIONE XIV.....pag.145**

*Caratterizzazione delle funzioni logaritmiche pure in termini di causa ed effetto - L'origine dei logaritmi come strumento di calcolo - Calcolo di un logaritmo mediante l'inserimento di medi.*

**LEZIONE XV.....pag.155**

*Perfezionamento dell'algoritmo per il calcolo dei logaritmi e scoperta del numero di Nepero - Il problema della capitalizzazione composta - Il numero di Nepero nella legge di Lambert-Beer.*

**LEZIONE XVI.....pag.167**

*Il numero di Nepero nella legge del decadimento radioattivo - Caratterizzazione delle funzioni potenze pure in termini di causa ed effetto - Le scale logaritmiche.*

**LEZIONE XVII.....pag.179**

*Uso degli assi logaritmici o bilogaritmici per trasformare in rette i grafici delle funzioni esponenziali, logaritmiche e potenze - Grafico logaritmico del decadimento radioattivo - Grafico bilogaritmico della III legge di Keplero - Il principio del regolo calcolatore.*

**LEZIONE XVIII.....pag.189**

*Crescita batterica - Equazioni fondamentali con le funzioni*

*esponenziali, logaritmiche e potenze - Esempi di disequazioni.*

***LEZIONE XIX.....pag.199***

*Disequazioni con le funzioni logaritmiche e potenze - Funzioni non monotone che mandano progressioni aritmetiche in progressioni aritmetiche.*

***LEZIONE XX.....pag.207***

*Progressioni armoniche - Media armonica - Riassunto delle proprietà fondamentali delle funzioni lineari, esponenziali, logaritmiche e potenze.*

***La ballata delle funzioni lineari, esponenziali, logaritmiche e potenze.....pag.219***

## ***PREMESSA***

Quando frequentavo la scuola elementare rimasi stregato da un racconto dal titolo *Direzione Marte*, che risentiva ancora della teoria ottocentesca dei canali avanzata dell'astronomo italiano Giovanni Schiaparelli e raccontava di un ingegnoso popolo marziano oppresso dal gravoso problema di irrigare un pianeta divenuto arido e desolato. Tra gli eroi dell'avventuroso viaggio spaziale c'era un certo *Professor Apotema*, uno scienziato tanto geniale quanto distratto e pasticcione, con due baffoni e una capigliatura disordinata stile Einstein e la tuta completamente imbrattata di formule matematiche.

Quasi quarant'anni dopo, nel 2001, volendo scrivere una rubrica di matematica per il giornalino "*Il Leonardo*" in forma di dialogo tra gli studenti di una classe e il loro insegnante di matematica, ebbi l'idea di far rivivere il professor Apotema, catapultandolo dallo spazio in un'aula di scuola. Il professor Apotema che era uscito dal mio pennarello aveva in comune con l'originale soltanto la capigliatura disordinata e i baffi e non era uno scienziato geniale, ma un professore di matematica di un istituto tecnico industriale, quotidianamente alle prese con una classe rumorosa e non sempre ben disposta allo studio.

Ultimamente, avendo ormai percorso un buon tratto della mia carriera di insegnante, ho sentito il bisogno di lasciare una testimonianza scritta delle tante attività didattiche sperimentate in questi trent'anni di lavoro, nella speranza che possa essere di qualche utilità non solo agli studenti, ma anche a qualche giovane collega. Ho così provato più volte a riscrivere in modo

sistematico gli appunti che anno dopo anno avevo fornito ai miei allievi, ma con esito del tutto insoddisfacente. La trattazione risultava asettica e, nonostante lo sforzo di cercare la semplicità, sapeva di accademico. Insomma, non c'era nulla dell'atmosfera con cui lavoravo in classe: mancavano gli alunni! Così ho pensato di ricorrere nuovamente al professor Apotema e alla sua rumorosa e variegata classe.

Da dove cominciare? Dall'inizio? Troppo impegnativo! Partire dall'inizio avrebbe implicato un progetto dettagliato di tutto il percorso, col solo effetto garantito di farmi passare la voglia di scrivere. Ho deciso quindi di individuare alcuni argomenti fondamentali e di procedere senza seguire un ordine preciso, ma soltanto l'ispirazione del momento. L'argomento che forse mi stava più a cuore mettere per iscritto era quello del calcolo infinitesimale, che da quasi vent'anni propongo ai miei studenti con l'uso degli infinitesimi e degli infiniti. Ho però preferito collaudare la nuova veste dei miei appunti partendo da un argomento più classico e così, quasi per caso, ho scelto di cominciare dalle funzioni lineari, esponenziali, logaritmiche e potenze, un argomento su cui non avevo mai scritto appunti dettagliati, ma per il quale ho ormai raggiunto da una decina di anni una certa stabilità nell'impostazione.

Non so se riuscirò a portare a termine l'impresa di trasporre l'intero programma nella veste di lezioni del professor Apotema ma, almeno per ora, sono abbastanza deciso a tentare l'impresa!

Ora però mi fermo qui perché... sta entrando in classe il professor Apotema!

*Giorgio Goldoni*

## LEZIONE I

**Apotema:-** Oggi cominciamo lo studio di quattro importanti classi di funzioni: le funzioni lineari, esponenziali, logaritmiche e potenze.

**Rozzy:-** Tutte in un colpo?

**Fuory:-** Figurati! Una alla volta, vero prof?

**Apotema:-** No, tutte insieme!

**Fuory:-** Cosa?! Tutte insieme?!

**Normy:-** Ma non faremo troppa confusione poi?

**Apotema:-** Spero proprio di no. Anzi, sono convinto che sarà più facile per voi vedere queste funzioni insieme. Si tratta infatti di funzioni strettamente imparentate fra loro e intendo presentarvele in parallelo proprio per evidenziare al meglio le analogie e le differenze.

**Scetty:-** Ma le potenze le conosciamo già!

**Apotema:-** Sì, ma solo quando l'esponente è un numero intero. Uno di questi quattro tipi di funzioni, invece, lo conoscete già abbastanza bene, anche se vale la pena di ritornarci sopra. Ma non perdiamo altro tempo e vediamo di cominciare!

**Bronty:-** Quattro cose in un colpo solo...

**Apotema:-** Tutte queste funzioni possono essere definite in termini di progressioni aritmetiche e geometriche. Una progressione aritmetica è una successione di numeri reali tali che ogni numero si ottiene dal precedente aggiungendo sempre uno stesso numero.

**Normy:-** Per esempio?

**Apotema:-** Per esempio, quando la signora maestra vi chiedeva di contare per 3 partendo da 5, vi chiedeva di declamare i termini della progressione aritmetica: 5, 8, 11, 14, 17, ... Ogni numero si ottiene dal precedente sommando sempre lo stesso numero, e cioè il numero 3.

**Scetty:-** Ma per il 5 non c'è il numero precedente!

**Apotema:-** Certo, Scetty. Avrei dovuto dire che "ogni numero, tranne eventualmente il primo, si ottiene dal precedente sommando sempre uno stesso numero".

**Sekky:-** In che senso, professore, tranne eventualmente il primo? Non c'è forse sempre il primo?

**Apotema:-** No. Pensa alla successione dei numeri interi. Si tratta ancora di una progressione aritmetica, anzi, della progressione aritmetica per eccellenza! Ogni numero si ottiene dal precedente sommandogli uno, ma non c'è il primo termine.

**Normy:-** Quindi può anche non esserci il primo termine?

**Apotema:-** Sembra proprio di sì!

**Normy:-** Ho capito, ma mi chiedevo se chiamiamo progressioni aritmetiche anche quelle dove non c'è il primo termine!

**Apotema:-** Sì, sono anche quelle progressioni aritmetiche. L'unica richiesta è che ogni numero si ottenga dal precedente sommando sempre lo stesso numero o, che è la stessa cosa, che sia costante la differenza tra un numero e il precedente.

**Scetty:-** Tranne, eventualmente, il primo!

**Apotema:-** Tranne, eventualmente, il primo!

**Dubby:-** E quando la maestra ci chiedeva di contare all'indietro, era ancora una progressione aritmetica?

**Apotema:-** Anche in quel caso. Se conti per 7 all'indietro partendo da 100, ottieni la progressione aritmetica: 100, 93, 86, 79, 72, ... Vorrà dire che in questo caso la differenza costante tra un termine e il precedente è negativa e vale  $-7$ . Ma è il momento di dire che questa differenza costante si chiama "ragione" della progressione aritmetica. Quanto vale, dunque, la ragione della progressione aritmetica: 5.2, 4.7, 4.2, 3.7, ... ?

**Svelty:-**  $-0.5$ !

**Dubby:-** Ma allora possono anche essere numeri non interi!

**Apotema:-** Mi era sembrato di averlo detto: i termini possono essere numeri reali qualsiasi! Una progressione aritmetica può avere soltanto un numero finito di termini oppure averne infiniti e, in quest'ultimo caso, può non avere un primo termine, non avere un ultimo termine o non avere né un primo né un ultimo termine. È poi ovvio che una progressione aritmetica può eventualmente essere prolungata a piacere a sinistra o a destra. Se, ad esempio, consideriamo la progressione aritmetica 3, 7, 11, 15, che ha ragione 4 ed è formata da soli quattro termini, ecco che possiamo prolungarla verso destra aggiungendo termini a piacere: 19, 23, 27, ... Analogamente, possiamo prolungarla a sinistra:  $-1$ ,  $-5$ ,  $-9$ , ...

**Normy:-** Allora possiamo sempre pensare di prolungarla all'infinito sia da una parte che dall'altra, no?

**Apotema:-** Quando ci fa comodo.

**Normy:-** E quand'è che ci fa comodo?

**Apotema:-** Lo vedrai. Ma adesso passiamo alle progressioni geometriche. Una progressione geometrica è una successione di numeri reali tali che ogni termine si ottiene dal precedente moltiplicandolo per uno stesso numero. Ogni termine tranne, eventualmente, il primo, vero Scetty?

**Scetty (soddisfatto):-** Già!

**Apotema:-** In modo equivalente possiamo dire che una progressione geometrica è una successione di numeri reali per i quali è costante il rapporto tra un termine e il precedente, tranne, eventualmente, il primo. Il rapporto costante è chiamato "ragione" della progressione geometrica. Sapresti dirmi, Normy, qual è la progressione geometrica di 5 termini con primo termine 3 e ragione 2?

**Normy:-** Allora ... 3, 6, 12, 24, 48 ...

**Apotema:-** Alt! Ho detto di 5 termini!

**Normy:-** Ok, prof!

**Apotema:-** Come vedi, ti ho dovuto fermare. E così abbiamo tutti capito che anche le progressioni geometriche possono essere prolungate a piacere da una parte e dall'altra. Come l'avresti prolungata a sinistra?

**Normy:-** A sinistra? Dunque ... 1.5, ...

**Apotema:-** Forse è più facile usare le frazioni, no?

**Normy:-** Ok.  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{3}{8}$ , ...

**Apotema:-** Basta così! Per motivi che vi saranno presto chiari, conviene considerare soltanto progressioni geometriche con termini positivi e quindi con una ragione positiva.

**Fuory:-** Ma non diventano negativi prima o poi se la prolunghiamo a sinistra?

**Apotema:-** E perché mai?

**Fuory:-** Perché calano sempre!

**Apotema:-** Prima di tutto non è necessariamente vero che i termini di una progressione geometrica decrescono verso sinistra! Se, ad esempio, la ragione vale  $\frac{1}{2}$ , i termini si dimezzano passando da un termine al successivo, mentre raddoppiano passando da un termine al precedente. Seconda cosa, dimezzando ogni volta il termine successivo, si ottengono

termini sempre più piccoli, ma sempre positivi!

**Fuory:**- Ah, vero!

**Apotema:**- Sapreste dirmi per quali valori della ragione i termini di una progressione geometrica crescono e per quali valori decrescono?

**Svelty:**- Crescono quando la ragione è maggiore di 1 e decrescono quando è minore!

**Apotema:**- Esatto.

**Dubby:**- E quando vale 1?

**Apotema:**- Pensaci un attimo. Che cosa succede se la ragione vale 1?

**Normy:**- I termini sono sempre uguali! Perché se si moltiplica per 1 il risultato non cambia!

**Apotema:**- Proprio così. Bene, adesso siamo in grado di dire che cosa sono le funzioni lineari, esponenziali, logaritmiche e potenze! Una funzione lineare è una funzione definita per tutti i numeri reali, che manda progressioni aritmetiche in progressioni aritmetiche. Se pensiamo a una funzione come a una macchina con un ingresso e un'uscita e tale che in corrispondenza di ogni ingresso ci sia sempre una e una sola uscita, ecco allora che una funzione lineare è una funzione che, ricevendo in ingresso i termini di una qualsiasi progressione aritmetica, fornisce in uscita i termini di un'altra progressione aritmetica. Attenzione! Questo deve succedere per qualunque progressione aritmetica in ingresso!

**Lenty:**- Potrebbe farci un esempio?

**Apotema:**- Consideriamo un punto materiale che si muove in linea retta. Che cosa significa affermare che il punto si muove di moto uniforme? Significa che, comunque noi scattiamo delle fotografie a uguali intervalli di tempo a partire da un istante qualsiasi, il punto, in corrispondenza della successione di scatti, si viene a trovare in punti della retta che si trovano a una stessa distanza uno dall'altro e nello stesso verso. Se sulla retta mettiamo un sistema di coordinate, ecco che possiamo dire la stessa cosa in questo modo: se gli istanti di tempo sono in progressione aritmetica, allora anche le posizioni corrispondenti, cioè le coordinate dei punti in cui il punto materiale si viene a trovare, sono pure in progressione aritmetica. Possiamo cambiare a piacimento l'istante del primo scatto o l'intervallo di tempo tra uno scatto e l'altro ma, in ogni caso, le posizioni

corrispondenti del punto materiale continueranno ad essere in progressione aritmetica, anche se con una ragione diversa. La legge oraria del moto rettilineo uniforme, cioè la funzione che associa ad ogni istante la posizione del punto materiale, è allora una funzione lineare!

Apotema prende dalla cartella la sua calcolatrice programmabile.

**Apotema:-** Vi pongo allora un problema. Ho inserito nella mia calcolatrice programmabile l'espressione di una funzione lineare e quindi posso calcolarne il valore per ogni numero. Secondo voi è sufficiente conoscere i valori di una funzione lineare su una progressione aritmetica per sapere esattamente di che funzione si tratta, e cioè per sapere il suo valore per ogni numero reale? Oppure non basta?

**Scetty:-** Mi viene da dire che non basta!

**Apotema:-** Perché?

**Scetty:-** Perché ci sono infinite progressioni aritmetiche diverse, che possono addirittura non avere nemmeno un termine in comune! E quindi non mi basta una sola progressione. Ce ne vorrebbero infinite per conoscere tutti i possibili valori della funzione che corrispondono agli infiniti valori possibili in ingresso!

**Apotema:-** In effetti, secondo la definizione che vi ho dato, Scetty avrebbe ragione... Ma...

**Normy:-** Ma, cosa, prof?

**Apotema:-** Vediamo cosa riusciamo a fare. Ditemi una progressione aritmetica. Dilla tu, Gioky!

**Gioky:-** Ok. Dico... 3, 9, 15, 21, ... Va bene?

**Apotema:-** Benissimo! Con uno slancio di fantasia, chiamiamo  $f$  la funzione che ho inserito nella mia calcolatrice.-  
(Apotema comincia a pigiare dei tasti).

**Apotema:-** Vi dirò che  $f(3)=5$  e  $f(9)=17$ . Dite che devo calcolare anche  $f(15)$  o me lo sapete indovinare voi?

**Geny:-** 29!

**Apotema:-** Vediamo... Sì, 29!

**Tonty:-** Fortuna!

**Apotema:-** Dimmi allora quanto vale  $f(21)$ , Geny!

**Geny:-** 41!

**Apotema** (dopo aver pigiato un tasto e fingendo di non sapere il

risultato):- Esatto, 41! Vuoi spiegarci come hai fatto?

**Furby:-** Facile! Vanno di 12 in 12!

**Apotema:-** Certo, ma come lo si poteva capire? Dillo pure, Geny.

**Geny:-** Siccome i valori di una funzione lineare su una progressione aritmetica devono formare ancora una progressione aritmetica, ho semplicemente prolungato la progressione aritmetica 5, 17! La ragione è 12 e quindi i termini successivi devono essere 29, 41, 53, ...

**Apotema:-** Avete capito tutti? Il fatto è che bastano due termini consecutivi per definire una progressione aritmetica. Perché, Furby?

**Furby:-** Ovvio! Se conosco due termini consecutivi faccio la differenza del secondo col primo e trovo la ragione! Una volta che ho trovato la ragione posso trovare tutti i termini che voglio!

**Apotema:-** Proprio così. Ma non abbiamo ancora finito. Il problema che vi ho posto è se ci basta oppure no conoscere i valori di una funzione lineare sui termini di una progressione aritmetica per conoscere il suo valore in un numero qualsiasi. Vediamo di continuare. Vi chiedo: quando fa  $f(12)$ ?

(Silenzio.)

**Geny:-** 23!

**Apotema:-** Bel colpo, Geny!

**Geny:-** Ho cambiato la progressione aritmetica in ingresso! Invece di 3, 9, 15, 21, ... ho preso 3, 6, 9, 12, 15, ...

**Bronty:-** Non vale!

**Geny:-** E perché no? Deve valere per tutte le progressioni aritmetiche in ingresso la regola che le corrispondenti successioni in uscita sono ancora progressioni aritmetiche!

**Normy:-** Sì, ma non ho ancora capito come hai fatto a dire che  $f(12) = 23$ !

**Geny:-** Ho osservato che 12 è a metà strada tra 9 e 15 e così ho considerato la progressione aritmetica che parte da 5 come l'altra ma con la ragione dimezzata. In questo modo ho solo infittito la progressione precedente. Ma allora anche la progressione in uscita deve essere un infittimento di quella precedente e anche la sua ragione deve dimezzare! Invece che di 12 in 12, deve andare di 6 in 6 e se  $f(9) = 17$  e  $f(15) = 29$  allora  $f(12) = 17 + 6 = 23$ !

**Normy:-** Adesso ho capito! Ma non ci sarei mai arrivato...

**Apotema:-** Io credo invece di sì. Quello che Geny ha chiamato "infittire" una progressione aritmetica, in gergo tecnico si dice "inserire dei medi". Dati due numeri  $a$  e  $b$  possiamo sempre inserire fra di essi un numero  $x$  in modo che i tre numeri  $a$ ,  $x$ ,  $b$  formino, nell'ordine, una progressione aritmetica. Diciamo allora che il numero  $x$  è il medio aritmetico tra  $a$  e  $b$ . Se seguiamo il ragionamento di Geny, dobbiamo richiedere che la ragione si dimezzi e passi quindi da  $b - a$  a  $\frac{b - a}{2}$ . Il medio aritmetico

dovrà allora valere  $x = a + \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{2}$ .

**Normy:-** La media aritmetica! Allora è per questo motivo che si chiama così!

**Svelty:-** Si poteva ricavare anche imponendo che la differenza fra  $x$  e  $a$  fosse uguale a quella tra  $b$  e  $x$ !

**Apotema:-** Certamente. Come dice Svelty, un altro modo è quello di scrivere la relazione  $x - a = b - x$ . Ne segue che deve essere  $2x = a + b$  e quindi  $x = \frac{a + b}{2}$ . Ma ritorniamo al nostro

problema. Possiamo sapere quanto vale  $f(4.28)$ ?

**Normy:-** Forse sì! Basta infittire ancora di più la progressione aritmetica in ingresso fino a che non si arriva a 4.28!

**Apotema:-** L'idea è proprio quella: inserire dei medi aritmetici. Chi mi sa dare subito una prima stima per  $f(4.28)$ ?

**Svelty:-** Siccome 4.28 è compreso fra 3 e 9 e siccome  $f(3) = 5$  e  $f(9) = 17$ , allora  $f(4.28)$  sarà compreso tra 5 e 17!

**Normy:-** Giusto!

**Apotema:-** Effettivamente per la funzione che ho inserito nella calcolatrice è proprio così, anche se hai aggiunto inconsapevolmente una proprietà delle funzioni lineari che non avevo dichiarato, e cioè che sono funzioni monotone. Altrimenti non è affatto detto che debba essere così!

**Asy:-** Ma cosa vuol dire che sono monotone?

**Normy:-** Le funzioni monotone sono quelle crescenti o decrescenti!

**Sekky:-** Oppure non decrescenti o non crescenti.

**Normy:-** Non ho capito perché le funzioni lineari sono

monotone?

**Apotema:-** Vi ho presentato le funzioni lineari come funzioni definite per tutti i numeri reali e che mandano progressioni aritmetiche in progressioni aritmetiche, ma questo non basta per identificarle a partire dai valori su una progressione aritmetica. Occorre aggiungere che devono essere monotone. Solo con questa ulteriore richiesta le funzioni lineari risultano completamente determinate dai valori che assumono su una qualsiasi progressione aritmetica. Nel nostro caso, senza questa ulteriore ipotesi, non avremmo modo di affermare che  $f(4.28)$  deve essere compreso tra 5 e 17! Ma continuiamo il nostro procedimento. Poiché  $3 < 4.28 < 9$ , allora  $f(3) < f(4.28) < f(9)$  e quindi  $5 < f(4.28) < 17$ . L'idea, come ha detto Normy prima, è quella di inserire medi aritmetici. Tra 3 e 9 inseriamo il medio aritmetico  $\frac{3+9}{2} = 6$  e tra 5 e 17 il medio  $\frac{5+17}{2} = 11$ . Questa volta  $3 < 4.28 < 6$  e quindi  $5 < f(4.28) < 11$ .

**Normy:-** E adesso inseriamo un medio tra 3 e 6! 4.5!

**Apotema:-** E cosa ne deduciamo?

**Normy:-** Che in 4.5 la funzione deve valere la media tra 5 e 11, cioè 8!

**Apotema:-** Qual è allora la stima di  $f(4.28)$ ?

**Normy:-**  $f(4.28)$  è compreso tra 5 e 8!

**Scetty:-** Ma siamo sicuri che si arrivi proprio a 4.28?

**Normy:-** A forza di infittire prima o poi ci arriviamo!

**Scetty:-** Non ne sarei così sicuro. Se vado sempre a metà becco solo certi numeri, ma non tutti!

**Apotema:-** Scetty ha ragione, ma prima di affrontare questa questione proviamo a proseguire con le nostre stime. Meglio organizzare il calcolo in una tabella. Scrivo a sinistra i valori di  $x$ , cioè i valori in ingresso, e a destra quelli di  $y$ , cioè quelli in uscita. In alto 3 e 5, i valori per difetto, e in basso 9 e 17, i valori per eccesso. I medi, invece di scriverli a metà e sprecare inutilmente tanto spazio, li scriviamo subito dopo o prima degli altri a seconda che siano per difetto o per eccesso.

Apotema e i ragazzi, armati di calcolatrice, compilano così la seguente tabella:

---

| x         | $y = f(x)$ |
|-----------|------------|
| 3         | 5          |
| 3.75      | 6.5        |
| 4.125     | 7.25       |
| 4.21875   | 7.4375     |
| 4.265625  | 7.53125    |
| ...       | ...        |
| 4.2890625 | 7.578125   |
| 4.3125    | 7.625      |
| 4.5       | 8          |
| 6         | 11         |
| 9         | 17         |

**Apotema:-** Fermiamoci qui. Abbiamo trovato un decimale esatto e la nostra stima finale è che  $7.53 < f(4.28) < 7.58$ . Volete sapere cosa mi dice la calcolatrice riguardo al vero valore di  $f(4.28)$ ? Mi dice che ...  $f(4.28) = 7.56$ !

**Gioky:-** Potevamo andarci più vicini! Bastava continuare ancora un po'!

**Apotema:-** Questo è il punto. Ogni volta dimezziamo l'incertezza e, pur di continuare abbastanza nei calcoli, possiamo, in linea di principio, ridurre l'errore a piacere. In pratica, prima o poi dobbiamo fermarci ma, se prescindiamo dai limiti di calcolo dei nostri strumenti, questo procedimento ci definisce un ben preciso numero reale, che è il valore di  $f(4.28)$ .

**Geny:-** Io ho trovato anche la formula che definisce la funzione!

**Apotema:-** Non ne dubito. Del resto si tratta di una funzione che già ben conoscete.

**Svelty:-** Anche io l'ho trovata: è il doppio meno uno! Ogni numero va a finire nel suo doppio diminuito di uno!

**Apotema:-** Esatto. Ma se ho scelto di fare questo percorso un motivo c'è: per le altre funzioni non sarà così facile calcolare il valore e non ci sarà di fatto altro modo se non usare un algoritmo come quello dell'inserimento di medi.

**Geny:-** Io ci sono arrivato pensando all'esempio del moto rettilineo uniforme. Se gli ingressi sono gli istanti in secondi e le

uscite le posizioni in metri, allora la velocità è il rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato! Dall'istante 3 all'istante 9 passano 6 secondi, durante i quali il punto passa dalla posizione 5 alla posizione 17 e percorre quindi 12 metri. Ne segue che la velocità è 2 metri al secondo e la posizione in un generico istante  $x$  è la velocità per il tempo trascorso dall'istante 3 più la posizione iniziale 5 e quindi  $2(x - 3) + 5 = 2x - 1$ !

**Apotema:-** Ottimo!

**Svelty:-** Io l'ho visto a occhio!

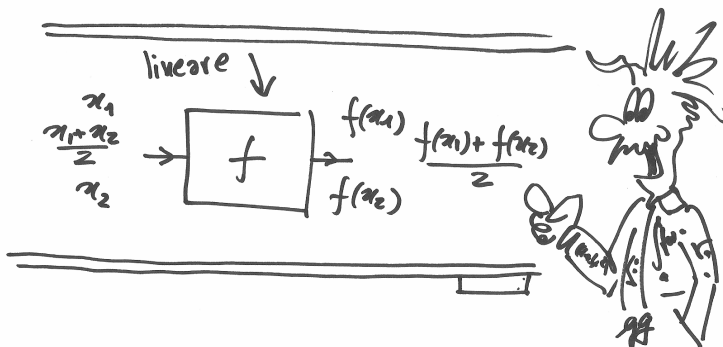
**Apotema:-** Come vi ho appena detto, il problema davvero interessante non è quello di trovare la formula giusta, ma quello di capire se la conoscenza dei valori che la funzione assume su una particolare progressione aritmetica è sufficiente per determinare la funzione stessa. La risposta è quindi positiva. Vediamo allora di scrivere l'algoritmo che consente di calcolare il valore della funzione in un numero  $x$  qualsiasi. Come avete già osservato, una funzione lineare è completamente determinata addirittura dai valori che assume su due numeri. Infatti possiamo prolungare i due numeri a una progressione aritmetica da ambo le parti e fare altrettanto coi due valori corrispondenti della funzione. Dato un numero qualsiasi  $x$ , possiamo estendere opportunamente la progressione aritmetica dei valori in ingresso in modo che  $x$  risulti compreso tra due termini  $x_1$  e  $x_2$  della progressione. Prolunghiamo allo stesso modo i due valori della progressione in uscita e arriviamo così alla situazione in cui abbiamo che  $x_1 < x < x_2$ , con  $x_1$  e  $x_2$  noti, e  $f(x_1) = y_1$  e  $f(x_2) = y_2$ , con  $y_1$  e  $y_2$  noti. L'algoritmo è allora il seguente. Si

determina il medio aritmetico  $\frac{x_1 + x_2}{2}$  tra  $x_1$  e  $x_2$  e deve

necessariamente succedere che sia  $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ ,

cioè che il valore della funzione nel medio aritmetico sia il medio aritmetico dei valori della funzione. A seconda che  $x$  sia minore o maggiore di  $\frac{x_1 + x_2}{2}$ , prenderemo i medi come opportune nuove stime di  $x$  e di  $f(x)$ . Il procedimento si ripete fino a quando le due stime per eccesso e per difetto di  $f(x)$  non sono

diventate più piccole di un errore prefissato  $\varepsilon > 0$ . E, ditemi un po', arrivati alla fine quale valore diamo in uscita? Quello per difetto o quello per eccesso?



**Normy:** - La media aritmetica!

**Apotema:** - Aggiudicato! Ecco allora l'algoritmo:

**inizio**

**leggi** ( $x_1, x_2, y_1, y_2, x, \varepsilon$ );

**ripeti**

$$a \leftarrow \frac{x_1 + x_2}{2}; b \leftarrow \frac{y_1 + y_2}{2};$$

**se**  $x < a$  **allora**  $x_2 \leftarrow a; y_2 \leftarrow b$

**altrimenti**  $x_1 \leftarrow a; y_1 \leftarrow b$

**fino a che**  $|y_2 - y_1| < \varepsilon$ ;

$$y \leftarrow \frac{y_1 + y_2}{2};$$

**scrivi** ( $y$ )

**fine.**

**Dubby:** - Scusi, prof, ma perché ha usato il valore assoluto? Non sappiamo già che  $y_2$  è maggiore di  $y_1$ ?

**Apotema:** - No, non lo sappiamo. Sappiamo che  $x_2$  è maggiore di  $x_1$ , ma la funzione potrebbe anche essere decrescente!

**Dubby:** - Ok, prof!

**Apotema:** - Avete scritto tutti? Posso modificare l'algoritmo?

**Lenty:**- Aspetti, prof!

**Apotema:**- Intanto tu, Svelty, vai al pc e scrivi il programma e lancialo inserendo i dati del nostro problema, con un errore di un decimillesimo.

**Lenty:**- Finito!

**Apotema** (cancellando e riscrivendo alcune righe dell'algoritmo):- Il risultato importante che abbiamo ottenuto è che una funzione lineare, cioè una funzione monotona definita su tutti i reali e che manda progressioni aritmetiche in progressioni aritmetiche, è completamente determinata dai valori che assume su una particolare progressione aritmetica. Addirittura, dai valori che assume su due soli numeri! L'algoritmo appena visto ci dice infatti che tale funzione esiste sempre ed è unica. Possiamo pensare di trasformare l'algoritmo precedente in un processo computazionale infinito, che determina il numero reale che corrisponde a un valore  $x$  in ingresso:

**inizio**

**leggi** ( $x_1, x_2, y_1, y_2, x$ );

**ciclo**

$$a \leftarrow \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad b \leftarrow \frac{y_1 + y_2}{2};$$

**se**  $x < a$  **allora**  $x_2 \leftarrow a; y_2 \leftarrow b$

**altrimenti**  $x_1 \leftarrow a; y_1 \leftarrow b$

**infinito**

**Svelty:**- Fatto! Mi viene 7.56004333!

**Apotema:**- Prova adesso con un errore di un milionesimo.

**Svelty:**- 7.56000006!

**Apotema:**- La precisione del risultato è limitata solo dalle possibilità di calcolo e di rappresentazione del nostro esecutore ma, concettualmente, definisce univocamente un numero reale.

**Svelty:**- Posso usare la precisione estesa!

**Apotema:**- Non importa, aggiungerebbe solo più cifre e noi eravamo interessati ad altro.

**Svelty:**- Spengo?

**Apotema:**- Ormai, spegni, ma prima salva il programma, perché ci servirà domani. Concludiamo la lezione anticipando la

definizione di funzione esponenziale. Si chiama funzione esponenziale una funzione definita su tutti i numeri reali e a valori nei numeri reali positivi, monotona, che manda progressioni aritmetiche in progressioni geometriche.

**Normy:-** Un esempio?

**Apotema:-** Come esempio consideriamo il decadimento radioattivo. Gli atomi di certi elementi sono instabili e si disintegrano. La disintegrazione di un atomo è un processo casuale e imprevedibile, pensate a un popcorn in padella che improvvisamente scoppia. C'è però una regolarità che vale con precisione straordinaria su un gran numero di atomi e che invece vale solo grossolanamente per i popcorn in padella. Se dopo un certo tempo, immaginate 10 anni, è rimasta solo una certa percentuale di atomi non disintegrati, diciamo il 90%, ecco che dopo altri 10 anni resterà solo il 90% dei sopravvissuti nel decennio precedente e cioè... Ditelo voi quanti ne restano!

**Normy:-** il 90% del 90%!

**Apotema:-** Grazie, Normy! Voglio sapere la percentuale complessiva!

**Svelty:-** Il 90% sono i  $90/100$  e quindi i  $9/10$  e i  $9/10$  dei  $9/10$  sono gli  $81/100$  e quindi l'81%!

**Apotema:-** Dunque, mentre il tempo varia in progressione aritmetica con ragione 10 anni, la quantità di elemento non disintegrato varia in progressione geometrica con ragione  $9/10$ . La funzione che associa a ogni istante di tempo la quantità di elemento radioattivo non disintegrato è allora una funzione esponenziale.

**Normy:-** Ma davvero si riduce al 90% ogni 10 anni?

**Apotema:-** Beh, c'è una grande differenza da elemento a elemento. Di solito ci si riferisce al tempo che occorre perché un elemento che decade si riduca al 50% e cioè si dimezzi. Provate voi a casa a cercare il tempo di dimezzamento del carbonio 14 o del cesio 137. A questo scopo vi dirò che spesso il tempo di dimezzamento è chiamato "emivita".

**Scopry:-** Prof, ma il carbonio 14 è quello usato in archeologia per datare i reperti?

**Apotema:-** Esattamente. Vi assegno un problema per casa. Ditemi cosa si intende, secondo voi, per medio geometrico. Inserite poi un medio geometrico tra 2 e 8 e, più in generale, tra due numeri positivi  $a$  e  $b$ . La lezione è finita. A domani! -



## LEZIONE II

**Apotema** (mentre firma il registro):- La lezione scorsa abbiamo introdotto le funzioni lineari come funzioni che mandano progressioni aritmetiche in progressioni aritmetiche e le funzioni esponenziali come funzioni che mandano progressioni aritmetiche in progressioni geometriche. Abbiamo poi visto una proprietà notevole delle funzioni lineari e cioè che risultano completamente determinate dai valori che assumono su una sola progressione aritmetica. Addirittura, siccome ogni coppia di numeri reali presi in un certo ordine può essere prolungata a piacere in una progressione aritmetica, una funzione lineare risulta determinata dai valori che assume su due numeri! Siamo poi passati alle funzioni esponenziali, che abbiamo definito come funzioni che mandano progressioni aritmetiche in progressioni geometriche e abbiamo fatto l'esempio del decadimento radioattivo. Avete trovato i tempi di dimezzamento del carbonio 14 e del cesio 137?

**Gioky**:- Io li ho trovati in Internet, su Wikipedia!

**Apotema**:- E che valori hai trovato?

**Gioky**:- Per il carbonio 14 ho trovato un tempo di dimezzamento di 5730 anni e per il cesio 137 di 30.17 anni.

**Apotema**:- Bene! E hai risolto i problemi sui medi geometrici?

**Gioky**:- Direi proprio di sì!

**Apotema**:- Allora vieni alla lavagna!

**Gioky**:- Dovevamo dire che cosa si intende per medio geometrico. Se prendiamo due numeri  $a$  e  $b$ ...

**Apotema**:- Positivi!

**Gioky**:- ... due numeri positivi  $a$  e  $b$ , allora inserire un medio geometrico significa trovare quel numero  $x$  tale che i tre numeri  $a$ ,  $x$ ,  $b$ , nell'ordine, formano una progressione geometrica.

**Apotema**:- Proprio così.

**Gioky**:- Dovevamo poi inserire un medio geometrico tra 2 e 8. Si vedeva subito che è 4! Infatti i numeri 2, 4, 8 sono una progressione geometrica di ragione 2!

**Apotema**:- Certamente! Ma qual è la relazione generale tra i due numeri dati e il medio geometrico?

**Gioky**:- Il quoziente tra  $x$  e  $a$  deve essere uguale a quello tra  $b$

e  $x$ , e quindi posso scrivere che

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{x}, \quad x^2 = ab, \quad x = \sqrt{ab}.$$

**Sekky:**- La media geometrica tra  $a$  e  $b$ !

**Fuory:**- Ma ci sono due soluzioni:  $x = \pm\sqrt{ab}$  !

**Gioky:**- Aveva detto il prof che si prendevano solo numeri positivi con le progressioni geometriche!

**Apotema:**- Adesso dovrebbe ormai essere chiaro il perché. Se vogliamo inserire ripetutamente dei medi geometrici ecco che non possiamo farlo tra un termine positivo e uno negativo.

**Normy:**- E perché dovremmo inserire più volte dei medi geometrici?

**Apotema:**- Per calcolare il valore di una funzione esponenziale. Vi propongo questo problema: il carbonio 14 ha un tempo di dimezzamento di 5730 anni, quanto ne resta dopo 1000 anni?

**Fuory:**- Facile, basta fare una proporzione!

**Apotema:**- Completamente sbagliato! Non decresce in proporzione al tempo! Dopo 5730 anni ne resta la metà, dopo due volte 5730 anni...

**Svelty:**- 11460 anni!

**Apotema:**- ... dopo 11460 anni ne resta la metà della metà, e cioè un quarto! Non decresce in proporzione al tempo! È proprio questo il fatto notevole: decresce *esponenzialmente*!

**Svelty:**- Quando il tempo varia in progressione aritmetica con ragione 5730 anni, la quantità di carbonio 14 varia in progressione geometrica con ragione  $1/2$ !

**Sekky:**- La funzione che associa a ogni istante di tempo la quantità di carbonio 14 è quella che abbiamo chiamato una funzione esponenziale.

**Apotema:**- È proprio questo il punto. So che la mia funzione esponenziale vale 100 all'istante iniziale, che posso pensare l'istante  $t = 0$ , e che vale 50 dopo 5730 anni, e quindi all'istante  $t = 5730$ . Mi chiedo quanto vale all'istante  $t = 1000$ . Cosa suggerite di fare?

**Geny:**- Come avevamo fatto per le funzioni lineari! Si tratta di infittire le progressioni!

**Sekky:**- Inserire dei medi...

**Apotema:**- Come?

**Geny:**- Dei medi aritmetici nella progressione aritmetica e dei

medi geometrici in quella geometrica! Come primo passo faccio la media aritmetica tra 0 e 5730, che fa 2865, e la media geometrica tra 100 e 50, che è  $\sqrt{5000}$ .

**Svelty:-** 70.71!

**Geny:-** Ok. Dopo 2865 anni resta il 70.71% del carbonio 14.

**Normy:-** Adesso ho capito! Ripetiamo la stessa cosa tra 0 e 2865!

**Apotema:-** Ancora una volta converrà ordinare i dati del calcolo in una tabella. Ormai che sei alla lavagna, scrivi tu, Gioky. E tu, Svelty, vedi di riesumare il tuo programma di ieri e di modificarlo per automatizzare il calcolo. Cosa ti basterà modificare?

**Svelty:-** Devo calcolare la media geometrica delle  $y$  invece di quella aritmetica!

**Apotema:-** Intanto tu, Gioky, scrivi l'algoritmo alla lavagna.

**Gioky:-** Posso prendere il quaderno, prof?

**Apotema:-** E prendi il quaderno!

(Gioky, in un minuto, scrive l'algoritmo)

**inizio**

**leggi** ( $x_1, x_2, y_1, y_2, \varepsilon$ );

**ripeti**

$$a \leftarrow \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad b \leftarrow \sqrt{y_1 y_2};$$

**se**  $x < a$  **allora**  $x_2 \leftarrow a; y_2 \leftarrow b$

**altrimenti**  $x_1 \leftarrow a; y_1 \leftarrow b$

**fino a che**  $|y_2 - y_1| < \varepsilon$ ;

$$y \leftarrow \frac{y_1 + y_2}{2};$$

**scrivi** ( $y$ )

**fine.**

**Scetty:-** Ma non doveva sostituire la media geometrica anche nella penultima istruzione, dove calcola  $y$ ?

**Apotema:-** Che cosa gli rispondi, Gioky?

**Gioky:-** E perché mai? Ho due stime, una per difetto e l'altra per eccesso, e devo dare in uscita il valore più attendibile, che è la media aritmetica!

**Apotema:**- Direi proprio di essere d'accordo con te, Gioky.

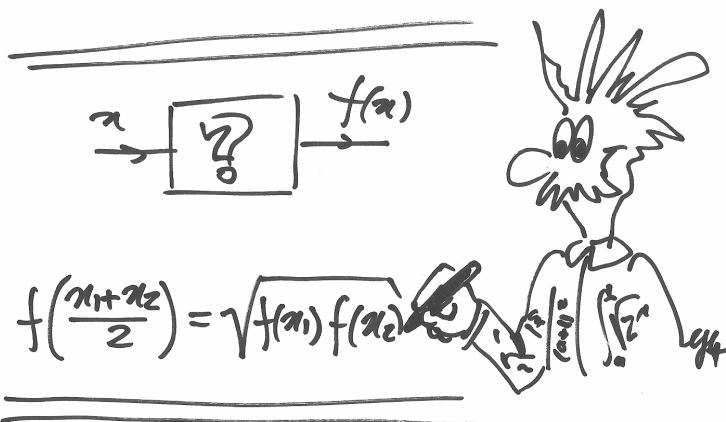
**Svelty:**- Ecco fatto! Sono pronto!

**Apotema:**- Allora inserisci i dati e richiedi un errore inferiore a 0.01.

**Gioky:**- Allora... in 0 vale 100... in 5730 vale 50... quindi in 1000... un errore massimo di 0.01... invio... Ecco! Vale 88.61!

**Apotema:**- E cosa significa?

**Gioky:**- Che dopo 1000 anni resta l'88.61% della quantità iniziale di carbonio.



**Apotema:**- Vedete allora che anche le funzioni esponenziali risultano completamente determinate dai valori che assumono su una sola progressione aritmetica in ingresso. Come per le funzioni lineari, poiché una coppia ordinata di numeri può sempre essere prolungata a una progressione, ecco che anche una funzione esponenziale risulta definita dai valori che assume su due soli numeri! Il cuore dell'algoritmo consiste nel fatto che se  $x_1$  e  $x_2$ , con  $x_1 < x_2$ , sono noti, e se conosciamo  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$ , allora possiamo affermare che il valore della funzione esponenziale nella media aritmetica tra  $x_1$  e  $x_2$  è la media geometrica tra  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$ . In formule:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}.$$

Ma proviamo almeno ad iniziare il calcolo passo passo con la

calcolatrice e aiutiamo Gioky a compilare una tabella analoga a quella di ieri.

Gioky, con l'aiuto dei compagni, arriva così a scrivere la seguente tabella

| x       | $y = f(x)$ |
|---------|------------|
| 0       | 100        |
| 716.25  | 91.70      |
| 895.31  | 89.74      |
| 984.84  | 88.77      |
| 996.04  | 88.65      |
| 998.83  | 88.61      |
| ...     | ...        |
| 1000.23 | 88.60      |
| 1001.63 | 88.59      |
| 1007.23 | 88.53      |
| 1029.61 | 88.29      |
| 1074.38 | 87.81      |
| 1432.5  | 84.09      |
| 2865    | 70.71      |
| 5730    | 50         |

**Normy:-** Ma dovremo sempre fare tutta questa fatica per calcolare una funzione esponenziale? Oppure useremo il programma di Gioky?

**Apotema:-** Per fortuna, no! Impareremo presto a scrivere una formula che può essere calcolata con la calcolatrice premendo qualche tasto. Ma dovete pensare che la calcolatrice esegua un algoritmo più o meno complesso per arrivare al risultato. In realtà non usa l'algoritmo che consiste nell'inserire medi, ma un algoritmo molto più astratto e rapido, che imparerete più avanti. Ma adesso, come vi ho anticipato, voglio subito presentarvi tutta la famiglia e passiamo senz'altro alle funzioni logaritmiche.

**Normy:-** Scommetto che sono quelle che mandano progressioni geometriche in progressioni aritmetiche!

**Apotema:-** Hai vinto! Ma adesso vedi di darmi la definizione esatta.

**Normy:-** Una funzione logaritmica è una funzione definita per

tutti i numeri reali, che manda progressioni geometriche in progressioni aritmetiche.

**Apotema:-** Non è proprio così... Che cosa ha detto Normy di sbagliato? E che cosa ha dimenticato di dire?

**Sekky:-** Le progressioni geometriche hanno solo termini positivi e quindi una funzione logaritmica va dai reali positivi nei reali.

**Apotema:-** Esatto. I valori della funzione logaritmica invece, essendo definiti da una progressione aritmetica, sono numeri reali qualsiasi. Ma Normy ha dimenticato qualcosa...

**Svelty:-** Monotona!

**Apotema:-** Monotona. Una funzione logaritmica è una funzione dai reali positivi nei reali, monotona, che manda progressioni geometriche in progressioni aritmetiche.

**Normy:-** Io non mi ricordo più perché queste funzioni devono essere monotone!

**Apotema:-** È la proprietà indispensabile per poter stabilire che se  $x_1 < x < x_2$ , allora  $f(x)$  è compreso tra  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$ , nell'ordine opportuno a seconda che la funzione sia crescente o decrescente.

**Normy:-** Già, è vero! -

**Dubby:-** Ma se noi non chiediamo che queste funzioni siano monotone, che cosa succede?

**Apotema:-** Una cosa terribile! Otteniamo delle funzioni inimmaginabili, che assumono tutti i possibili valori per infinite volte tra due numeri qualsiasi!

**Dubby:-** Accipicchia! E perché mai?

**Apotema:-** Per adesso prendetelo per buono. Se avremo tempo ve lo farò vedere. Ma torniamo alle funzioni logaritmiche.

**Sekky:-** Scusi, professore, ma allora le funzioni logaritmiche non sono altro che funzioni esponenziali con gli ingressi scambiati con le uscite!

**Apotema:-** Esatto. Tranne un caso speciale, le funzioni logaritmiche sono le funzioni inverse delle funzioni esponenziali e, viceversa, le funzioni esponenziali sono le inverse delle funzioni logaritmiche. Ricordatevi infatti che non esistono funzioni per loro natura inverse, ma solo funzioni inverse di altre, così come non esistono numeri che per loro natura sono opposti, ma solo numeri opposti di altri numeri. Il concetto di funzione inversa è un concetto relativo, come quello di opposto.

**Furby:-** Allora, nell'esempio del decadimento radioattivo, la funzione che ci dà in quale istante resta una certa quantità dell'elemento è una funzione logaritmica!

**Apotema:-** Esattamente. Anzi, il problema più interessante, quello che consente di fare le datazioni, è proprio quello di determinare quanto tempo è passato sapendo di quanto si è ridotta la percentuale di carbonio 14.

**Dubby:-** Io non ho ancora capito come funziona la storia del carbonio 14!

**Apotema:-** Non è di questo che ci dobbiamo occupare e le cose sono sempre abbastanza complicate quando si scende nei dettagli. La situazione è fondamentalmente la seguente. I raggi cosmici mantengono quasi costante la percentuale dell'isotopo 14 del carbonio nell'atmosfera. Anche il carbonio presente negli organismi viventi è, in quella stessa percentuale, carbonio 14. Quando un organismo muore e smette di respirare e di nutrirsi, non introduce più carbonio 14 e quello che resta decade e diminuisce quindi continuamente in percentuale, col tempo di dimezzamento che conoscete. Ecco allora che dalla percentuale misurata possiamo calcolare, mediante una funzione logaritmica, il tempo trascorso dalla morte.

**Fuory:-** Fantastico! Lo usano anche quelli di CSI per gli omicidi, vero?

**Apotema:-** Prova un po' a pensare di quanto si riduce in qualche ora se ha un tempo di dimezzamento di 5730 anni! Lo si usa solo per tempi lunghi almeno dei secoli!

**Fuory:-** Peccato!

**Apotema:-** Ma vediamo un esempio diverso. Consideriamo un materiale semitrasparente che lascia passare solo il 90% della luce ogni 10 cm di spessore. Quale deve essere lo spessore di una lastra di quel materiale se voglio che lasci passare il 99% della luce? Chi mi sa inquadrare il problema?

**Sekky:-** Ogni volta che lo spessore aumenta di 10 cm la percentuale di luce che esce è il 90% di quella precedente. Quando lo spessore varia in progressione aritmetica con ragione 10 cm, la percentuale di luce che attraversa la lastra varia in progressione geometrica con ragione 9/10. Si tratta dunque di una funzione esponenziale!

**Apotema:-** Verissimo, ma io non vi ho chiesto di determinare la

percentuale di luce che corrisponde a un dato spessore, ma di determinare lo spessore che corrisponde a una data percentuale di luce!

**Geny:-** In questo caso possiamo dire che quando la percentuale di luce varia in progressione geometrica con ragione 9/10, lo spessore della lastra varia in progressione aritmetica con ragione 10 cm. Si tratta allora di una funzione logaritmica!

**Apotema:-** Dovrebbe essere ormai ovvio come procedere. Si inseriscono medi in ingresso e in uscita. Basta cambiare una riga per adattare il solito algoritmo dicotomico al caso delle funzioni logaritmiche:

**inizio**

**leggi** (  $x_1, x_2, y_1, y_2, \epsilon$  );

**ripeti**

$$a \leftarrow \sqrt{x_1 x_2}; b \leftarrow \frac{y_1 + y_2}{2};$$

**se**  $x < a$  **allora**  $x_2 \leftarrow a; y_2 \leftarrow b$

**altrimenti**  $x_1 \leftarrow a; y_1 \leftarrow b$

**fino a che**  $|y_2 - y_1| < \epsilon$ ;

$$y \leftarrow \frac{y_1 + y_2}{2};$$

**scrivi** (  $y$  )

**fine.**

La proprietà chiave delle funzioni logaritmiche può allora essere scritta in questo modo:

$$f\left(\sqrt{x_1 x_2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Come la enunceresti a parole, Sekky?

**Sekky:-** Il valore di una funzione logaritmica nella media geometrica di due numeri è la media aritmetica dei valori nei due numeri.

**Apotema:-** Molto bene! E adesso vediamo di determinare qual è lo spessore che lascia passare il 99% della luce.

**Dormy** (appena svegliato): - Prof, ormai suona!

**Apotema:-** E va bene, calcolatelo per casa.

**Bronty:-** Bravo Dormy! Non potevi dormire ancora un po'?

**Apotema:-** A domani!

**Bronty:-** Eh no, prof, domani non ci vediamo!

**Apotema:-** Allora, alla prossima!



### LEZIONE III

**Gioky:-** Lo spessore della lastra era di  $9.5\text{ mm}$ , vero prof?

**Apotema** (dopo aver dato una sbriciatina a un biglietto):-  
Esatto, Gioky.

**Copy:-** Anche a me è venuto così!

**Apotema:-** Tutta farina del tuo sacco, vero, Copy?

**Copy:-** Certo prof, perché?

**Apotema:-** Allora vieni alla lavagna a farci vedere come hai fatto.

**Copy:-** Ho dimenticato il quaderno a casa...

**Apotema:-** Che peccato! Ma hai certamente la calcolatrice e possiamo ripetere i calcoli. Vieni pure.

**Copy:-** Ha le pile scariche!

**Apotema:-** Pazienza, vorrà dire che te la presterà il tuo compagno di banco.

(Copy si avvia alla lavagna pensieroso)

**Apotema:-** Vuoi ricordarci il problema?

**Copy:-** Allora... C'era una lastra... Non ricordo i dati...

**Apotema:-** Sekky, esponi il problema.

**Sekky:-** Subito, professore. "Un materiale semitrasparente lascia passare solo il 90% della luce ogni  $10\text{ cm}$  di spessore.

Quale deve essere lo spessore di una lastra di quel materiale se voglio che lasci passare il 99% della luce?"

**Apotema:-** Chiaro per tutti?

**Copy:-** Abbastanza...

**Apotema:-** Dimmi un po', Copy, secondo te lo spessore della lastra dovrà essere minore o maggiore di  $10\text{ cm}$ ?

**Copy:-** Beh... se con  $10\text{ cm}$  di spessore abbiamo il 90% della luce... per arrivare al 99% ci vorranno circa  $11\text{ cm}$  ...

**Apotema:-** Ma se mi avevi appena detto che il risultato era meno di un centimetro!

**Copy:-** Forse mi ricordavo male...

**Apotema:-** Secondo te, dunque, occorre aumentare lo spessore della lastra per aumentare la quantità di luce che l'attraversa?

**Copy:-** Ah! Ho capito adesso! Più la lastra è sottile più lascia passare luce!

**Apotema:-** Alleluia!

**Copy:-** Mi basta fare una proporzione!

**Apotema:-** Ancora la storia della proporzione! Lo vuoi capire o no che quando lo spessore varia in progressione aritmetica la quantità di luce che attraversa la lastra varia in progressione geometrica? La funzione che ci dà la percentuale di luce in termini dello spessore è una funzione esponenziale, mentre quella che ci dà lo spessore in termini della percentuale di luce è una funzione logaritmica! Se  $f$  è quest'ultima funzione, allora, quello che sappiamo è che  $f(90) = 10\ldots$  e... e poi?

**Svelty:-** E poi che  $f(100) = 0$ ! Perché passa tutta la luce, cioè il 100%, quando la lastra non c'è e quindi quando lo spessore è zero!

**Apotema:-** Copy, dicci almeno cosa dobbiamo calcolare!

**Copy:-** Lo spessore che lascia passare il 99% della luce...

**Apotema:-** Che, in termini della funzione  $f$ , corrisponde a cosa?

**Copy:-** Corrisponde a... a...  $f(99)$ , no?

**Apotema:-** Già! E volevi farmi credere che lo avevi calcolato!

**Copy:-** Posso andare al posto?

**Apotema:-** Ormai che sei qui, mostraci come si trova la risposta! Abbiamo visto ormai più di una volta come si procede con l'inserimento dei medi. Che medio devi inserire tra 90 e 100? E quale medio tra 10 e 0?

**Copy:-** Allora... 90 e 100 sono percentuali...

**Svelty:-** Che variano in progressione geometrica quando lo spessore varia in progressione ...

**Apotema:-** L'ho chiesto a Copy!

**Copy:-** Devo inserire un medio geometrico tra 90 e 100... che dovrebbe essere... la radice del prodotto... e quindi la radice di 9000...

**Apotema:-** Che fa? Prendi due decimali.

**Copy (con la calcolatrice):-** Allora ... 94.87!

**Apotema:-** Adesso come fai a dire quanto fa  $f(94.87)$ ?

**Copy:-** Devo inserire un medio aritmetico tra... 10 e 0...

**Apotema:-** Sei capace di fare il conto a mente?

**Copy:-** Facile! Fa 5!

**Apotema:-** Fantastico! Dunque  $f(94.87) = 5$ . Che cosa significa?

**Copy:-** Che ci vuole una lastra spessa  $94.87\text{ cm}$  per lasciare passare il 5% della luce!

**Apotema:-** Orrore!

**Copy:-** Ah, no! Che uno spessore di  $5\text{ cm}$  lascia passare il 94.87% della luce!

**Apotema:-** Meglio la seconda! E adesso?

**Copy:-** Inserisco un medio tra... dunque...

**Apotema:-** In quale intervallo cade 99? Tra 90 e 94.87 o tra 94.87 e 100?

**Copy:-** Tra 94.87 e 100! Adesso non mi sbaglio più! Devo inserire un medio geometrico tra 94.87 e 100 e uno aritmetico tra 5 e 0!

**Apotema:-** Vedi di disegnare una tabella alla lavagna e di scrivere in ordine i risultati dei calcoli.

E Copy compila la seguente tabella.

| x      | $y = f(x)$ |
|--------|------------|
| 90     | 10         |
| 94.868 | 5          |
| 97.400 | 2.5        |
| 98.692 | 1.25       |
| 98.854 | 1.0938     |
| 98.936 | 1.0156     |
| 98.976 | 0.9766     |
| 98.997 | 0.9570     |
| ...    | ...        |
| 99.002 | 0.9521     |
| 99.007 | 0.9473     |
| 99.017 | 0.9375     |
| 99.344 | 0.625      |
| 100    | 0          |

**Apotema:-** Possiamo concludere che, per lasciar passare il 99% della luce, la lastra deve avere uno spessore di  $9.5\text{ mm}$ .

**Gioky:-** Come avevo trovato io!

**Apotema:-** E, spero, anche altri! Ma passiamo subito alle funzioni potenze, e cioè alle funzioni che ... dimmelo tu, Normy!

**Normy:-** Le funzioni che vanno... dai reali positivi ai reali positivi... monotone... e che mandano progressioni geometriche

in progressioni geometriche!

**Apotema:-** Perfetto, Normy! E adesso vediamo un esempio interessante... Collegatevi a Internet e trovatemi il periodo e il semiasse maggiore dell'orbita di Venere e di Giove!

**Sogny:-** Grande!

**Scopry:-** Ho trovato i dati di Venere su Wikipedia!

**Sogny:-** E io quelli di Giove!

**Apotema:-** Iniziamo da Venere. Dettami i valori del periodo e del semiasse maggiore, Scopry.

**Scopry:-** Di periodi ce ne sono due: periodo sinodico e periodo orbitale!

**Apotema:-** Il periodo sinodico di un pianeta è quello tra due ritorni nella stessa posizione rispetto al sole, osservato dalla Terra. A noi interessa il periodo orbitale.

**Scopry:-** In anni o in giorni?

**Apotema:-** Facciamo in anni.

**Scopry:-** 0,6151970 anni!

**Apotema:-** E il semiasse maggiore?

**Scopry:-** In chilometri o in... UA? Che cosa significa "UA"?

**Apotema:-** Significa *unità astronomica*, che è la distanza media Terra-Sole e che vale circa 150 milioni di chilometri, anche se la sua definizione esatta è un po' più complessa. Quanto misura allora il semiasse maggiore di Venere in unità astronomiche?



Venere

periodo orbitale: 0.615 anni

semiasse maggiore: 0.723 U.A.



Giove

periodo orbitale: 11.863 anni

semiasse maggiore: 5.203 U.A.

**Scopry:-** Misura 0.72333199 unità astronomiche!

**Apotema:-** E adesso passiamo a Giove. Vai, Sogny!

**Sogny:-** Il periodo orbitale di Giove è di 11.863892 anni e il suo

semiasse maggiore è di 5.20336301 unità astronomiche.

**Apotema:-** Bene! Verifichiamo che il periodo e il semiasse maggiore dei pianeti sono legati da una funzione potenza. A questo scopo arrotondiamo a tre decimali i quattro numeri trovati e indichiamo con  $f$  la funzione che associa al periodo il semiasse maggiore. Avremo che  $f(0.615) = 0.723$  e  $f(11.863) = 5.203$ . Cercatemi ora il periodo di un altro pianeta, ad esempio Marte, e verifichiamo che  $f$  è una funzione potenza. Chi mi dice il periodo di Marte?

**Svelty:-** Il periodo di Marte è di 1.881 anni!

**Apotema:-** Calcoliamo allora  $f(1.881)$ , supponendo che  $f$  sia una funzione potenza, inserendo dei medi. Ovviamente, questa volta si inseriranno dei medi geometrici sia per i valori in ingresso che per quelli in uscita e la proprietà chiave si riassume con la formula

$$f(\sqrt{x_1 x_2}) = \sqrt{f(x_1) f(x_2)}.$$

A parole: il valore di una funzione potenza nella media geometrica di due numeri positivi è la media geometrica dei valori della funzione in quei numeri. Vieni tu, Scopry, a scrivere l'algoritmo e a fare il calcolo alla lavagna, mentre Svelty controlla il risultato col suo programma, opportunamente modificato.

Scopry, aiutandosi con gli appunti, scrive l'algoritmo:

**inizio**

**leggi** ( $x_1, x_2, y_1, y_2, \varepsilon$ );

**ripeti**

$a \leftarrow \sqrt{x_1 x_2}$ ;  $b \leftarrow \sqrt{y_1 y_2}$ ;

**se**  $x < a$  **allora**  $x_2 \leftarrow a$ ;  $y_2 \leftarrow b$

**altrimenti**  $x_1 \leftarrow a$ ;  $y_1 \leftarrow b$

**fino a che**  $|y_2 - y_1| < \varepsilon$ ;

$y \leftarrow \frac{y_1 + y_2}{2}$ ;

**scrivi** ( $y$ )

**fine.**

Compila poi la seguente tabella, con l'aiuto dei compagni e sotto la supervisione di Apotema.

| x      | $y = f(x)$ |
|--------|------------|
| 0.615  | 0.723      |
| 1.289  | 1.184      |
| 1.866  | 1.516      |
| 1.877  | 1.521      |
| 1.879  | 1.523      |
| 1.881  | 1.524      |
| ...    | ...        |
| 1.882  | 1.524      |
| 1.888  | 1.527      |
| 1.909  | 1.539      |
| 1.954  | 1.563      |
| 2.047  | 1.612      |
| 2.245  | 1.714      |
| 2.701  | 1.940      |
| 11.863 | 5.203      |

**Apotema:-** Prova a far girare il programma, Svelty, con un errore di 0.001.

**Svelty:-** Già fatto! Il risultato al millesimo è 1.524!

**Apotema:-** Ditemi allora il valore del semiasse maggiore di Marte in unità astronomiche, arrotondato al millesimo.

**Sogny:-** 1.524! Fantastico! La funzione era veramente una funzione potenza! Ma ... vale per tutti i pianeti?

**Apotema:-** Sì, si tratta della famosa Terza Legge di Keplero! Proviamo adesso a fare il calcolo per Saturno e ... per la Terra! Qualcuno trovi il periodo di Saturno.

**Svelty:-** 29.45 anni!

**Apotema:-** Usiamo il programma di Svelty, senza fare la tabella con la calcolatrice. Quali dati dobbiamo introdurre?

**Normy:-** Come prima, no? Usiamo Venere e Giove come coppia di punti che determinano la funzione potenza.

**Apotema:-** C'è un problemino: il programma di Svelty funziona per calcolare il valore di una funzione potenza compreso tra due numeri in cui si conosce il valore della funzione. Il periodo di Marte era compreso tra quelli di Venere e di Giove, ma quello di

Saturno no! Come si fa?

**Furby:-** Estendiamo a destra le progressioni fino a comprendere il periodo di Saturno!

**Apotema:-** Proprio così. E questo procedimento potrebbe essere inglobato nell'algoritmo. Ma per ora ci accontentiamo di estendere le progressioni con la calcolatrice. Vieni alla lavagna tu allora, Furby.

**Furby:-** Per estendere le progressioni devo prima calcolare la ragione. Il periodo di Giove è 11.863 anni e quello di Venere 0.615 anni. La ragione è 11.863 diviso 0.615 che fa... 19.289. Il termine successivo è allora 19.289 per 11.863, che fa... 228.825, che supera decisamente il periodo di Saturno!

**Apotema:-** E per un ipotetico pianeta con periodo 228.825 anni, quale sarebbe il valore del semiasse maggiore?

**Furby:-** Devo fare la stessa cosa per la progressione geometrica dei semiasse maggiori. Calcolo prima la ragione, che si ottiene facendo il rapporto tra il semiasse maggiore di Giove, che è 5.203, col semiasse maggiore di Venere, che è 0.723. La ragione viene 7.196 che, moltiplicata per 5.203, fa 37.441.

**Apotema:-** Benissimo! Adesso sappiamo che  $f(228.825) = 37.441$  e vogliamo calcolare  $f(29.45)$ . Usiamo quindi Giove e il misterioso pianeta X, che non esiste, per determinare il semiasse maggiore di Saturno. Vai col programma, Svelty!

**Svelty:-** Allora... sapendo che in 11.863... la funzione vale 5.203... e in 228.825... vale 37.441... mi deve calcolare il valore in 29.45... metto tre decimali?

**Apotema:-** Sì, va bene. Tu Scopry, intanto, tieniti pronto a comunicare il valore del semiasse maggiore dell'orbita di Saturno da Wikipedia!

**Svelty:-** 9.541!

**Scopry:-** 9.537 unità astronomiche!

**Apotema:-** Direi proprio un ottimo risultato. Abbiamo verificato che i periodi sono legati ai semiasse maggiori da una funzione potenza. Adesso concludiamo con la nostra Terra. Ovviamente, possiamo di nuovo usare Venere e Giove.

**Svelty:-** Immagino che il periodo sia un anno!

**Apotema:-** Diciamo di sì, anche se l'anno del calendario è l'anno tropico e non quello siderale. In altre parole è la durata tra

due equinozi di primavera e non la durata dell'orbita rispetto al riferimento delle stelle lontane, ma la differenza, dovuta alla precessione degli equinozi, è di appena una ventina di minuti. Metti pure un anno!

**Scopry:-** In effetti su Wikipedia il periodo della Terra è 1.0000175 anni!

**Apotema:-** Possiamo tranquillamente trascurare questa piccola differenza. Vai, Svelty!

**Svelty:-** In 0.615 vale 0.723... in 11.863 vale 5.203... dimmi quanto vale in 1... con precisione 0.001... Il risultato è 1.000! -

**Scopry:-** Su Wikipedia è 1.0000001124!

**Apotema:-** Provate, a casa, a fare i calcoli anche per gli altri pianeti.

Driiiiiiiiiiiiiiiiiin

**Asy:-** Come fa, prof, a finire sempre a pelo?

**Apotema:-** Fortuna!

## LEZIONE IV

I ragazzi di Apotema hanno verificato anche sugli altri pianeti che il legame tra il periodo e il semiasse maggiore è espresso da una funzione potenza.

**Apotema:-** Vediamo ora di arrivare a un'espressione per le quattro classi di funzioni. Iniziamo anche questa volta dalle funzioni lineari. Abbiamo visto che una funzione lineare è completamente determinata dai valori che assume su una qualsiasi progressione aritmetica e cominciamo col cercare l'espressione della funzione lineare che manda una data progressione aritmetica in una data progressione aritmetica. Il modo più semplice di definire una progressione aritmetica è, in fondo, quello della signora maestra, che vi dice da che numero partire e con che passo contare. La sola differenza è che noi non ci limitiamo ai soli numeri naturali. Possiamo allora definire un progressione aritmetica prendendo come riferimento un numero reale qualsiasi  $c$  e fissando una ragione arbitraria  $d$ . A questo punto possiamo estendere arbitrariamente la progressione a sinistra e a destra. Come si estenderà a destra?

**Ovvy:-** Sommo sempre  $d$ , a partire da  $c$ , e ottengo  $c + d, c + 2d, c + 3d, \dots$

**Apotema:-** E, a sinistra?

**Ovvy:-** Sottraggo sempre  $d$  e i termini diventano  $c - d, c - 2d, c - 3d, \dots$

**Apotema:-** Bene. Possiamo allora indicare una generica progressione aritmetica con

$$\dots, c - 2d, c - d, c, c + d, c + 2d, \dots$$

Immaginiamo che questa sia la progressione aritmetica in ingresso per una funzione lineare  $f$ . Allora la successione dei valori corrispondenti della funzione

$$\dots f(c - 2d), f(c - d), f(c), f(c + d), f(c + 2d), \dots$$

sarà ancora una progressione aritmetica. Se indichiamo con  $C$  il valore di  $f(c)$  e con  $D$  la ragione, allora possiamo riscrivere la successione dei valori in uscita nella stessa forma di quelli in ingresso:

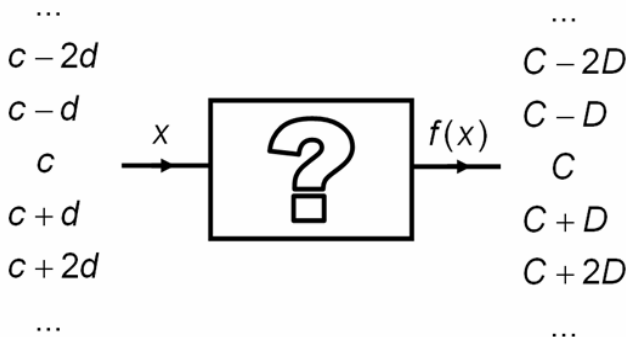
$$\dots C - 2D, C - D, C, C + D, C + 2D, \dots$$

Ecco il problema: qual è l'espressione della funzione lineare che manda la progressione

$$\dots, c - 2d, c - d, c, c + d, c + 2d, \dots$$

nella progressione

$$\dots C - 2D, C - D, C, C + D, C + 2D, \dots ?$$



Ma cominciamo da un caso più semplice, il più semplice possibile! Qual è secondo voi la progressione aritmetica più semplice?

**Normy:-** Quella dei numeri interi!

**Apotema:-** Certamente. Prendiamo quindi come riferimento lo zero e ragione 1 e otteniamo la progressione

$$\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Supponiamo ora che anche la progressione in uscita sia particolarmente semplice...

**Scetty:-** Quella in ingresso possiamo sceglierla noi, ma quella in uscita no!

**Apotema:-** Verissimo! Ma, per cominciare, immaginiamo che la nostra funzione lineare mandi lo zero nello zero, e cioè che sia  $f(0) = 0$ . La progressione corrispondente in uscita sarà allora del tipo

$$\dots - 2b, -b, 0, b, 2b, \dots$$

Dovrebbe essere facile indovinare l'espressione della nostra funzione lineare...

**Svelty:-** Si moltiplica l'ingresso per  $b$ :  $f(x) = bx$ !

**Apotema:-** Almeno nei numeri interi... Come puoi essere sicuro

che la stessa formula valga anche per gli altri numeri? Per esempio, come puoi essere sicuro che  $f(2.5) = 2.5b$ ?

**Geny:-** Sempre col trucco di inserire dei medi!

**Apotema:-** Bel colpo!

**Geny:-** Siccome 2.5 è la media aritmetica tra 2 e 3, allora  $f(2.5)$  sarà la media tra  $f(2)$  e  $f(3)$ !

**Apotema:-** Vieni alla lavagna a terminare il tuo ragionamento.

**Geny:-** Siccome  $f(2) = 2b$  e  $f(3) = 3b$  allora

$$f(2.5) = \frac{2b + 3b}{2} = \frac{5b}{2} = 2.5b. \text{ Vale per tutti i numeri!}$$

**Apotema:-** Diciamo che possiamo approssimare a piacere un qualsiasi numero  $x$  partendo da due interi e inserendo medi aritmetici e se  $f(x) = bx$  per due numeri  $x_1$  e  $x_2$ , allora la stessa espressione per  $f$  vale per la media aritmetica tra  $x_1$  e  $x_2$ . Ormai che sei qui, fallo vedere tu, Geny.

**Geny:-** È la stessa cosa di prima. Se  $f(x_1) = bx_1$  e  $f(x_2) = bx_2$

allora  $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{bx_1 + bx_2}{2}$  e, raccogliendo  $b$ , otteniamo

subito che  $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = b \frac{x_1 + x_2}{2}$  e vale ancora la formula

$$f(x) = bx!$$

**Apotema:-** Benissimo, Geny! Avete capito tutti? Una funzione lineare con  $f(0) = 0$  ha la forma  $f(x) = bx$ , dove  $b$  è il valore che corrisponde al numero 1, cioè  $b = f(1)$ .

**Sekky:-** Sbaglio o è la funzione che esprime la proporzionalità diretta?

**Apotema:-** Non sbagli! Le funzioni lineari che mandano lo zero nello zero sono dette funzioni lineari omogenee. Noi le chiameremo anche funzioni lineari pure. Il loro grafico è una retta passante per l'origine, come ben sapete.

**Normy:-** Il numero  $b$  è la pendenza!

**Apotema:-** Esatto.

**Dubby:-** E il caso generale?

**Apotema:-** Cominciamo col caso generale delle funzioni lineari pure. Siccome  $f(0) = 0$ , la progressione

$$\dots, -2d, -d, 0, d, 2d, \dots$$

deve dare in uscita una progressione del tipo

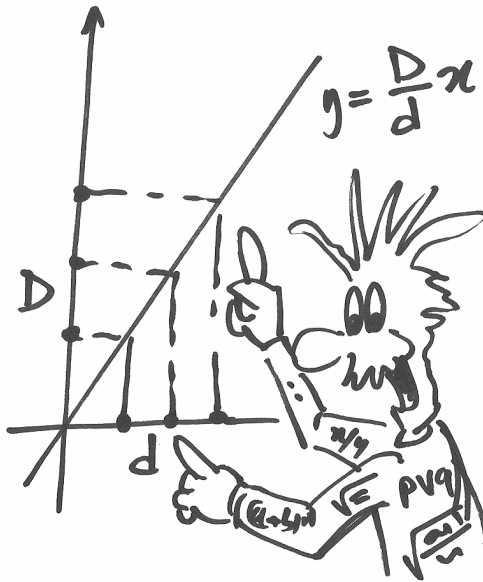
$$\dots, -2D, -D, 0, D, 2D, \dots$$

Come posso ricondarmi al caso precedente?

**Furby:-** Prima divido per  $d$ ! Così ottengo la progressione degli interi!

**Apotema:-** Ottima idea, Furby! Furby suggerisce di ottenere la funzione lineare applicando prima la funzione che consiste nel dividere per  $d$  e che possiamo chiamare "diviso  $d$ ", e poi di applicare... quale funzione?

**Normy:-** Una volta che ho la progressione degli interi il problema è lo stesso di prima! Basta moltiplicare per  $D$  maiuscolo!



**Apotema:-** Ecco allora che, partendo dalla progressione

$$\dots, -2d, -d, 0, d, 2d, \dots$$

appliciamo la funzione " $/d$ " e otteniamo la progressione degli interi

$$\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

e quindi, applicando la funzione " $\times D$ ", la progressione

$$\dots, -2D, -D, 0, D, 2D, \dots$$

Abbiamo così ottenuto la funzione

$$f(x) = D \frac{x}{d} = \frac{D}{d} x.$$

Inevitabilmente è ancora una funzione del tipo  $f(x) = bx$ , dove  $b$  è il rapporto delle due ragioni. Potete cambiare la ragione della progressione in ingresso e cambierà pure la ragione della progressione in uscita, ma il rapporto delle due ragioni rimane sempre costante per una data funzione lineare pura. Se pensate al grafico la cosa è ovvia! La progressione in ingresso è una successione di punti equidistanziati sull'asse delle ascisse che, per il Teorema di Talete, vengono mandati dal grafico rettilineo in una successione di punti equidistanziati sull'asse delle ordinate. Il rapporto delle ragioni non è altro che la pendenza della retta.

**Scopry:-** Ma allora il grafico di una funzione lineare è sempre una retta! Anche quando non passa per l'origine!

**Apotema:-** Vediamo subito che è così. Consideriamo allora il caso più generale. Come fate a ottenere l'espressione della funzione lineare che manda la progressione

$$\dots, c - 2d, c - d, c, c + d, c + 2d, \dots$$

nella progressione

$$\dots C - 2D, C - D, C, C + D, C + 2D, \dots ?$$

Il trucco è quello di Furby di vedere la funzione come composizione di funzioni più semplici!

**Furby:-** Prima sottraggo  $c$  e così ottengo la progressione

$$\dots, -2d, -d, 0, d, 2d, \dots$$

Poi divido per  $d$  minuscolo e ottengo la progressione degli interi

$$\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

**Normy:-** Adesso moltiplico per  $D$  maiuscolo e ottengo la progressione

$$\dots, -2D, -D, 0, D, 2D, \dots$$

**Apotema:-** Ormai è fatta!

**Svelty:-** Sommiamo  $C$  maiuscolo!

**Apotema:-** Già! Dunque la nostra funzione lineare è la composizione delle funzioni " $-c$ ", " $/d$ ", " $\times D$ " e " $+C$ " e ha quindi la forma:

$$f(x) = \frac{D}{d}(x - c) + C.$$

**Dubby:-** Non sono sicuro di aver capito che cosa significa quella formula...

**Apotema:-** Abbiamo visto, qualche lezione fa, che una funzione lineare è completamente determinata dai valori che assume su una progressione aritmetica. Valori che sono a loro volta in progressione aritmetica. Ci siamo chiesti qual è l'espressione della funzione lineare che manda la progressione

$$\dots, c - 2d, c - d, c, c + d, c + 2d, \dots$$

nella progressione

$$\dots C - 2D, C - D, C, C + D, C + 2D, \dots$$

Poiché le due progressioni sono descritte dai quattro numeri  $c$ ,  $d$ ,  $C$ ,  $D$ , anche la forma della funzione lineare deve essere esprimibile mediante questi quattro numeri. Abbiamo poi espresso la funzione cercata come composizione di funzioni più semplici e siamo giunti al risultato che

$$f(x) = \frac{D}{d}(x - c) + C.$$

**Normy:-** Possiamo vedere qualche esempio?

**Apotema:-** Ne vedremo tantissimi! E tanti ne avete già visti! Ritorniamo al caso del moto rettilineo uniforme. Individuiamo una progressione aritmetica di istanti prendendo come istante di riferimento l'istante  $t_0$  e come intervalli di tempo, e cioè come ragione, la durata  $\Delta t$ . La progressione, estesa nei due versi, è allora

$$\dots, t_0 - 2\Delta t, t_0 - \Delta t, t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, \dots$$

Affermare che il moto è rettilineo uniforme significa affermare che, in corrispondenza degli istanti della progressione precedente, il punto mobile occupa posizioni in progressione aritmetica. Se indichiamo con  $s_0$  la posizione che corrisponde all'istante  $t_0$  e con  $\Delta s$  gli spostamenti corrispondenti alle durate  $\Delta t$ , la progressione degli spostamenti è allora

$$\dots, s_0 - 2\Delta s, s_0 - \Delta s, s_0, s_0 + \Delta s, s_0 + 2\Delta s, \dots$$

Qual è la funzione che esprime la legge oraria?

**Normy:-** Sarà una funzione lineare!

**Apotema:-** Già, ma ti chiedo come è fatta!

**Normy:-** Applico la formula... Al posto di  $c$  minuscolo c'è  $t_0$  ... al posto di  $d$  metto  $\Delta t$  ... poi metto  $s_0$  e  $\Delta s$  al posto di  $C$  maiuscolo e  $D$  maiuscolo...

**Apotema:-** Vieni a scriverla alla lavagna.

**Normy:-**  $f(x) = \dots$

**Apotema:-** Vorrai dire  $f(t)$ ! Anzi, scrivi  $s(t)$ !

**Normy:-** Allora...  $s(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t}(t - t_0) + s_0$ .

**Apotema:-** Esatto. Notate che non sono  $\Delta s$  e  $\Delta t$  ad avere importanza, ma solo il loro rapporto  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ , che non dipende dalle

particolari progressioni scelte!

**Svelty:-** La velocità!

**Apotema:-** Bravo Svelty. Ritroviamo la nota legge oraria del moto rettilineo uniforme  $s(t) = v(t - t_0) + s_0$ .

**Dubby:-** Scusi, prof, ma c'è una cosa che non capisco. La funzione lineare non dipende dalla particolare progressione considerata in ingresso, vero?

**Apotema:-** Diciamo che una particolare progressione in ingresso e i valori corrispondenti la determinano completamente, ma avremmo potuto usare un'altra progressione.

**Dubby:-** Eppure nella formula compare proprio quella, con quella corrispondente in uscita! Se ne avessi usata un'altra allora la formula mi veniva diversa!

**Apotema:-** Niente affatto! C'è una stessa funzione lineare che però può essere individuata da progressioni diverse, così come il moto rettilineo uniforme sarebbe stato lo stesso anche se avessimo scelto di fare delle foto a partire da un istante diverso e a intervalli diversi di tempo.

**Dubby:-** Continuo a non capire!

**Apotema:-** Niente di meglio di un esempio numerico. Sto memorizzando nella calcolatrice una funzione lineare. Dammi due progressioni aritmetiche come ingressi.

**Dubby:-** Ok! Allora... 4, 11, 18, ... e... 5, 2, -1, ...

**Apotema:-** Benissimo. La prima dà in uscita la progressione... 10, 31, 52, ... mentre, la seconda, la progressione...13, 4, -5, ... . Quale termine vuoi prendere come termine di riferimento per la prima? 4, 11, 18 o un altro ancora?

**Dubby:-** Facciamo 11.

**Apotema:-** Benissimo. Gli corrisponde in uscita il numero 31. Inoltre, la ragione della progressione in ingresso è 7, mentre di quella in uscita è 21. Usando la formula ottenuta prima, ne deduciamo che

$$f(x) = \frac{21}{7}(x - 11) + 31 = 3(x - 11) + 31 = 3x - 2.$$

Vi faccio notare che se avessimo scelto come termine di riferimento 4, a cui corrisponde 10, la stessa formula ci avrebbe fornito la risposta

$$f(x) = \frac{21}{7}(x - 4) + 10 = 3(x - 4) + 10 = 3x - 2,$$

e cioè la stessa funzione! Ci mancherebbe altro! Ma adesso passiamo alla seconda progressione, che pure definisce la stessa funzione lineare. Quale termine scegli come termine di riferimento, 5, 2 o -1?

**Dubby:-** Scelgo -1!

**Apotema:-** Gli corrisponde il numero -5, mentre le ragioni valgono -3 e -9. La formula ci fornisce il risultato

$$f(x) = \frac{-9}{-3}(x + 1) - 5 = 3(x + 1) - 5 = 3x - 2.$$

Spero quindi che sia chiaro a tutti il significato della formula

$f(x) = \frac{D}{d}(x - c) + C$ . Bastano i valori su una sola progressione aritmetica per determinare la funzione lineare, ma la stessa funzione può essere determinata dai valori che assume su una qualsiasi altra progressione aritmetica. La formula in questione vi consente di determinare la stessa funzione in ciascun caso speciale.

**Dubby:-** Adesso direi proprio di aver capito!

**Sekky:-** Eravamo però giunti alla conclusione che non è necessaria un'intera progressione aritmetica, ma che basta

conoscere i valori della funzione in due numeri!

**Apotema:-** Proprio così, visto che una progressione aritmetica è individuata da due soli termini. Adesso chiedo a voi di scrivermi un'espressione per la funzione lineare  $f$ , con  $f(x_1) = y_1$  e  $f(x_2) = y_2$ . Chi sa darmi la risposta?

(Silenzio)

**Svelty:-** Prendo come termini di riferimento  $x_1$  e  $y_1$  e come ragioni  $x_2 - x_1$  e  $y_2 - y_1$  e applico la formula di prima!

**Apotema:-** Proprio così. E cosa ottieni?

**Svelty:-** Basta sostituire!

**Apotema:-** Seguendo Svelty, abbiamo che  $c = x_1$ ,  $d = x_2 - x_1$ ,  $C = y_1$  e  $D = y_2 - y_1$  e l'espressione per la funzione lineare cercata diventa

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1.$$

**Sekky:-** La formula dell'interpolazione lineare!

**Normy:-** Della retta per due punti!

**Apotema:-** Già! Il grafico di una funzione lineare è proprio una retta anche nel caso generale e non solo nel caso delle funzioni lineari pure. Consideriamo infatti una generica funzione lineare  $f$  e poniamo  $g(x) = f(x) - a$ , dove  $a = f(0)$ . Poiché sottrarre uno stesso numero a ogni termine di una progressione aritmetica conduce ancora a una progressione aritmetica, anche  $g$  è una funzione lineare. Inoltre si tratta anche di una funzione lineare pura, poiché  $g(0) = f(0) - a = 0$ . Ne segue subito che  $g(x) = bx$  e quindi  $f(x) - a = bx$ , da cui  $f(x) = a + bx$ . Ponendo poi  $x = 1$ , ricaviamo che  $f(1) = b + a$  ovvero che  $b = f(1) - f(0)$ . In conclusione, ogni funzione lineare ha la forma  $f(x) = a + bx$ , dove  $a = f(0)$  e  $b = f(1) - f(0)$ .

**Sekky:-** L'intercetta con l'asse delle ordinate e la pendenza della retta!

**Apotema:-** Quando abbiamo ricavato la forma della funzione lineare che manda una data progressione aritmetica in un'altra, abbiamo usato l'espediente di esprimerla mediante la composizione di funzioni più semplici. Le funzioni usate mandavano a loro volta progressioni aritmetiche in progressioni

aritmetiche ed erano quindi a loro volta funzioni lineari. Vi chiedo: la composizione di funzioni lineari è sempre una funzione lineare? Quando una funzione lineare è invertibile? E, in quel caso, l'inversa è ancora una funzione lineare? Pensateci con calma a casa. La lezione odierna è terminata.

**Bronty:-** Amen!

## LEZIONE V

**Apotema:-** Chi viene alla lavagna a esporre le soluzioni dei problemi per casa?

**Sekky:-** Posso venire io, professore?

**Apotema:-** Certo, Sekky! Da dove cominciamo?

**Sekky:-** Dalla domanda se la composizione di due funzioni lineari è ancora una funzione lineare.

**Apotema:-** E qual è la tua risposta?

**Sekky:-** Che è ancora una funzione lineare!

**Apotema:-** Esatto. Comincia col ricordare a tutti che cos'è la composizione di due funzioni e poi mostraci come sei arrivato alla tua conclusione.

**Sekky:-** Subito, professore. Date due funzioni  $f: A \rightarrow B$  e  $g: C \rightarrow D$ , con  $f(A) \subseteq C$ , allora si definisce la composizione di  $f$  con  $g$  la funzione  $g \circ f: A \rightarrow D$  con  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

**Bronty:-** Fino a prima che Sekky desse la definizione credevo di sapere che cos'è la composizione di due funzioni, adesso non lo so più! Che cosa accidente significa  $f(A) \subseteq C$ ?

**Apotema:-** Se pensiamo a una funzione come a una macchina con un ingresso e una uscita, allora la composizione di due funzioni è la macchina che si ottiene collegando in serie le due macchine. La condizione  $f(A) \subseteq C$  significa che l'immagine di  $A$  deve essere un sottoinsieme di  $C$ , e cioè che tutte le possibili uscite della prima macchina  $f$  devono essere possibili ingressi della seconda macchina  $g$ . Tutto qua.

**Sekky:-** Posso continuare, professore?

**Apotema:-** Certamente!

**Sekky:-** Ho considerato il caso di due funzioni lineari  $f$  e  $g$ . Siccome vanno entrambe dai reali nei reali, sono certamente componibili. A questo punto ho usato il fatto che noi conosciamo la forma di una funzione lineare. Ho posto  $f(x) = a + bx$  e  $g(x) = A + Bx$ . A questo punto ho semplicemente calcolato l'espressione della composizione:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = A + Bf(x) = A + B(a + bx) = (A + aB) + (Bb)x$   
che è ancora una funzione dello stesso tipo!

**Apotema:-** Molto bene, Sekky.

**Svelty:-** Io l'ho dimostrato in un attimo, senza fare calcoli!

**Sekky:-** E come hai fatto?

**Svelty:-** Facile! Se  $f$  manda progressioni aritmetiche in aritmetiche e  $g$  pure, allora anche la loro composizione manda progressioni aritmetiche in progressioni aritmetiche! Ovvio!

**Normy:-** Forte, Svelty!

**Scetty:-** Non basta, prof! Una funzione lineare deve anche essere monotona! Devi dimostrare anche che la composizione è monotona!

**Apotema:-** Scetty ha ragione.

**Svelty:-** Ok, ma è abbastanza ovvio!

**Apotema:-** Ciò che è ovvio per uno può non esserlo per un altro! In ogni caso dimostrare vuol dire anche dettagliare il ragionamento e non dare nulla o quasi per ovvio ...

**Svelty:-** Se, ad esempio, sono tutte e due crescenti, allora la loro composizione è crescente! Infatti dire che una funzione è crescente significa dire che se l'ingresso cresce allora cresce anche l'uscita o, che è la stessa cosa, se l'ingresso decresce, decresce anche l'uscita. Se l'ingresso della prima cresce, allora cresce anche la sua uscita, che è l'ingresso della seconda, e quindi cresce anche l'uscita della seconda! Morale della favola: se l'ingresso della composizione cresce, allora cresce anche la sua uscita e quindi la composizione è crescente!

**Bronty:-** Che cos'è, uno scioglilingua? Io non ho capito un tubo!

**Rozzy:-** Tu non capisci mai un tubo!

**Apotema:-** Basta, Rozzy! E tu, Bronty, cerca di ascoltare con più attenzione!

**Sekky:-** E se la prima è crescente e la seconda decrescente?

**Svelty:-** La composizione è decrescente!

**Sekky:-** Perché?

**Svelty:-** Decrescente significa che quando l'ingresso cresce l'uscita decresce e, viceversa, quando l'ingresso decresce l'uscita cresce. Se la prima è crescente e la seconda decrescente, allora quando l'ingresso della prima cresce la sua uscita, che è l'ingresso della seconda, pure cresce, ma allora l'uscita della seconda decresce! Allora se l'ingresso della composizione cresce la sua uscita decresce e quindi la composizione è decrescente!

**Scopry:-** È come se valesse la regola dei segni! Crescente più

e decrescente meno!

**Gioky:-** Gobba a ponente, funzione crescente, gobba a levante, funzione calante!

**Apotema:-** Scopy ha detto una cosa vera. Guardate la formula trovata da Sekky. La pendenza della composizione è  $Bb$ , e cioè è il prodotto delle pendenze. E quand'è che una funzione lineare è crescente o decrescente?

**Normy:-** Quando la pendenza è positiva o negativa!

**Apotema:-** Ecco da dove sbuca la regola dei segni!

**Scetty:-** E se la pendenza è zero?

**Apotema:-** La funzione lineare è costante e la composizione è inevitabilmente costante!

**Scopy:-** Zero per qualcosa uguale a zero!

**Apotema:-** La soluzione data da Sekky è la più completa, perché ha determinato anche la forma della composizione, ma quella data da Svelty è molto interessante perché ci consentirà di indovinare al volo cosa accadrà quando comporre in modo opportuno i quattro tipi di funzioni.

**Sekky:-** Ci aveva chiesto anche di dire quando una funzione lineare è invertibile e, in quel caso, di che tipo di funzione di tratta.

**Apotema:-** E qual è la tua risposta?

**Sekky:-** Ho trovato che una funzione lineare è invertibile quando la pendenza è diversa da zero e che la sua inversa è ancora una funzione lineare.

**Apotema:-** Tutto giusto.

**Sekky:-** Ancora una volta sono partito dal fatto che conosco l'espressione generale di una funzione lineare e ho posto  $y = a + bx$ . A questo punto mi sono chiesto quando posso ricavare la  $x$  a partire dalla  $y$ . Ottengo che  $bx = y - a$  e, adesso, dovrei dividere per  $b$ , ma posso farlo solo se  $b \neq 0$ . In quel caso, ottengo che  $x = \frac{1}{b}y - \frac{a}{b}$ , che è ancora una funzione lineare!

**Apotema:-** Bravissimo, Sekky!

**Svelty:-** Anche questa risposta l'ho trovata senza fare calcoli! Se una funzione lineare manda progressioni aritmetiche in progressioni aritmetiche, la stessa cosa fa anche la funzione che si ottiene scambiando l'ingresso con l'uscita!

**Scetty**:- Manca la solita monotonia!

**Svelty**:- Lo vede anche un cretino che se una funzione è monotona allora è monotona anche la sua inversa!

**Apotema**:- Vedi di moderare il tuo linguaggio se non vuoi che ti sbatta fuori!

**Fuory** (distratto):- Dice con me, prof?

**Apotema**:- Sembra invece che tu non abbia considerato il fatto che può non essere invertibile.

**Svelty**:- Me ne ero dimenticato!

**Normy**:- Questo lo si poteva vedere dal grafico! Se il grafico è una retta, anche quello dell'inversa è una retta. Soltanto, se la retta è orizzontale, l'inversa avrebbe per grafico una retta verticale, che non è il grafico di una funzione!

**Apotema**:- Bravissimo, Normy! Vedi che quando vuoi riesci a fare cose notevoli!

**Normy**:- Grazie, prof!

**Apotema**:- Un'ultima osservazione, legata a quello che ha appena detto Normy. Sekky ci ha mostrato che la pendenza dell'inversa è il reciproco della pendenza della funzione di partenza. Se ricordiamo che la pendenza è la tangente dell'angolo  $\varphi$  che la retta forma con l'asse delle ascisse, ecco che la pendenza dell'inversa è la tangente dell'angolo

complementare e quindi  $\tan(90^\circ - \varphi) = \frac{1}{\tan \varphi}$ . Approssimando il

grafico di una funzione qualsiasi in un punto con la sua retta tangente, questa proprietà diventa del tutto generale, come vedremo molto più avanti...

**Normy**:- E le altre funzioni? Le abbiamo abbandonate?

**Apotema**:- No di certo! Anzi, riprendiamo immediatamente le funzioni esponenziali! Vogliamo trovare, tanto per cominciare, la forma della funzione esponenziale che manda una data progressione aritmetica in una data progressione geometrica. Abbiamo già visto che la più generale progressione aritmetica ha la forma

$$\dots, c - 2d, c - d, c, c + d, c + 2d, \dots$$

Per le progressioni geometriche possiamo ragionare allo stesso modo: fissiamo un numero positivo di riferimento  $C$  e una ragione positiva  $Q$ . La più generale progressione geometrica ha allora la forma

$$\dots, CQ^{-2}, CQ^{-1}, C, CQ, CQ^2, \dots$$

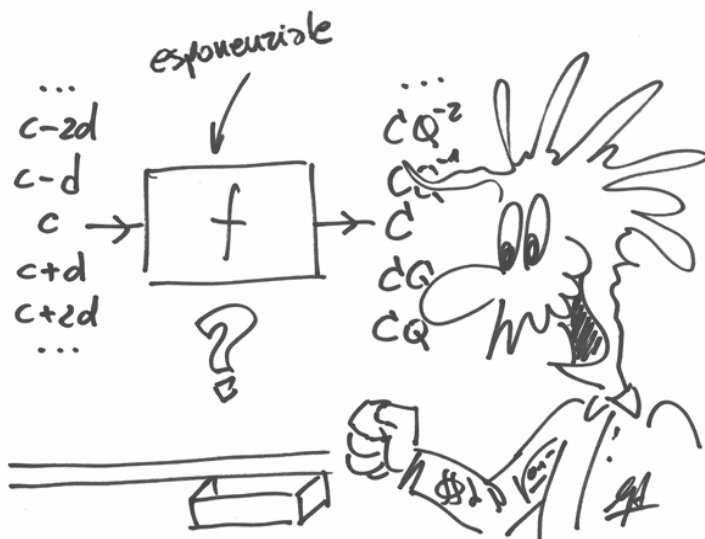
Il problema, formulato in termini precisi, è allora il seguente: qual è l'espressione della funzione esponenziale che manda la progressione aritmetica

$$\dots, c - 2d, c - d, c, c + d, c + 2d, \dots$$

nella progressione geometrica

$$\dots, CQ^{-2}, CQ^{-1}, C, CQ, CQ^2, \dots ?$$

Anche questa volta vediamo di partire dal caso più semplice...



**Normy:-** Quello in cui la progressione in ingresso è quella dei numeri interi?

**Apotema:-** Esattamente. E, come nel caso delle funzioni lineari, supponiamo per ora che la nostra funzione esponenziale di cui vogliamo trovare l'espressione sia tale che  $f(0) = 1$ .

**Dubby:-** Per le lineari avevamo supposto che fosse  $f(0) = 0$  ! Perché non anche in questo caso?

**Apotema:-** Una funzione esponenziale è sempre positiva. E poi, dove si moltiplica, il numero più bello è il numero uno e non il numero zero!

**Normy:-** Allora le funzioni esponenziali pure sono quelle che in zero valgono uno, vero?

**Apotema:-** Ben detto, Normy! E cominciamo proprio dalle funzioni esponenziali pure. Quando abbiamo in ingresso la progressione aritmetica

$$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

abbiamo allora in uscita una progressione geometrica del tipo

$$\dots, b^{-2}, b^{-1}, 1, b, b^2, \dots$$

**Svelty:-** La funzione  $b^x$ !

**Apotema:-** Già! Per ogni intero  $x$  abbiamo che  $f(x) = b^x \dots$

**Dubby:-** E per gli altri numeri?

**Apotema:-** Noi non abbiamo mai detto che cosa significa  $b^x$  quando  $x$  non è intero. Non c'è occasione migliore di questa per dirlo! Sappiamo però che la funzione esponenziale con  $f(x) = b^x$  è definita per tutti i numeri, mediante il processo di inserimento di medi. Conveniamo che  $b^x$ , per gli  $x$  non interi, sia proprio il valore in  $x$  della funzione esponenziale che manda la progressione aritmetica

$$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

nella progressione geometrica

$$\dots, b^{-2}, b^{-1}, 1, b, b^2, \dots$$

In altre parole, conveniamo che  $b^x$  sia il valore di  $f(x)$ , dove  $f$  è la funzione esponenziale con  $f(0) = 1$  e  $f(1) = b$ !

**Normy:-** E come facciamo a calcolarla?

**Apotema:-** Con l'algoritmo dell'inserimento dei medi!

**Bronty:-** Che pizza!

**Apotema:-** Ma non abbiamo bisogno di fare tutti quei calcoli, perché la calcolatrice li fa per noi! Basta premere un tasto!

**Sekky:-** E la calcolatrice esegue l'algoritmo dicotomico?

**Apotema:-** No. Vi avevo già accennato al fatto che la calcolatrice esegue un algoritmo diverso, più astratto e più

potente: calcola un polinomio!

**Sogny:-** Un polinomio? Che cosa c'entrano i polinomi?

**Apotema:-** Lo imparerete al momento giusto. Per adesso potete pensare che la calcolatrice esegua rapidissimamente l'algoritmo dicotomico!

**Normy:-** Allora usiamo il tasto  $x^y$  ?

**Apotema:-** Sì, anche se non tutte le calcolatrici hanno quel tasto. Cercate sul vostro manuale!

**Rozzy:-** Io il manuale l'ho gettato!

**Apotema:-** Allora compra un'altra calcolatrice identica e getta la calcolatrice!

**Normy:-** Facciamo qualche prova?

**Apotema:-** Certo, Normy. Prova a calcolare  $2^{1/2}$ .

**Normy:-** Subito, prof!

**Svelty:-** 1.414213562373!

**Normy:-** Confermo. Ma... che risultato strano!

**Apotema:-** Perché strano? Che risultato ti saresti aspettato? Prova a pensare quanto dovrebbe valere  $2^{1/2}$ !

**Geny:-** Siccome  $1/2$  è la media aritmetica tra 0 e 1,  $2^{1/2}$  deve essere la media geometrica tra 1 e 2, e quindi  $\sqrt{2}$ !

**Svelty:-** Infatti il numero di prima è proprio  $\sqrt{2}$ !

**Normy:-** Allora  $b^{1/2}$  fa sempre  $\sqrt{b}$ , vero?

**Apotema:-** Esatto. E quanto fa  $b^{1/3}$ ?

**Normy:-** Continuo con l'inserimento dei medi, no?

**Apotema:-** In quel modo ti ci avvicini quanto vuoi, ma c'è un modo per arrivare subito al risultato esatto!

**Geny:-** Infittisco la progressione degli interi andando al passo di  $1/3$ ! La progressione aritmetica 0,  $1/3$ ,  $2/3$ , 1 andrà a finire nella progressione geometrica  $1, q, q^2, q^3$ , dove  $q = f(1/3)$ ...

**Normy:-** Grazie! E quanto fa  $q$ ?

**Geny:-** Deve essere  $q^3 = b$ ! Allora risulta che  $q = \sqrt[3]{b}$ !

**Normy:-** Incredibile! Fare la radice quadrata significa elevare alla  $1/2$  e fare la radice cubica significa elevare alla  $1/3$ !

**Svelty:-** Allora  $b^{1/n} = \sqrt[n]{b}$ !

**Apotema:-** Certamente. Basta ripetere il ragionamento di Geny.

E se fate attenzione vedete che  $b^{2/3} = q^2$ , che è  $(\sqrt[3]{b})^2$ , che fa  $\sqrt[3]{b^2}$ .

**Svelty:-** Ho capito! Elevare a una frazione vuol dire elevare al numeratore e prendere la radice di indice il denominatore!

**Apotema:-** Esatto:  $b^{m/n} = \sqrt[n]{b^m}$ .

**Normy:-** E se l'esponente non è una frazione?

**Apotema:-** Ci vuole un algoritmo come quello dell'inserimento dei medi.

**Normy:-** E allora? Come facciamo?

**Apotema:-** Ve l'ho già detto! La calcolatrice ha già l'algoritmo incorporato! Anche se nella notazione decimale non c'è posto per gli irrazionali nella calcolatrice...

**Scetty:-** Ma... possiamo usare le solite regole di calcolo che usavamo per gli esponenti interi?

**Apotema:-** Sì, Scetty. Ma direi che è proprio il caso di rispolverarle! Intanto vi dico che la funzione esponenziale pura con  $f(1) = b$  si chiama funzione esponenziale in base  $b$ .

Useremo per  $f(x)$  la comoda notazione  $b^x$ , come per gli interi, ma a volte useremo la notazione funzionale  $\exp_b x$ . Chi viene a scrivere alla lavagna le proprietà della funzione esponenziale in base  $b$  che eravate soliti usare per gli esponenti interi? -

(Nessuno si offre)

**Apotema:-** Ok. Io scrivo la prima parte di ogni uguaglianza e voi mi dettate la seconda parte! ...  $b^{x+y} = ?$

**Tutti (in coro):-**  $b^x b^y$ !

**Apotema:-** E in notazione funzionale?

**In pochi:-**  $\exp_b(x + y) = \exp_b x \exp_b y$ !

Dopo qualche minuto e non pochi scivoloni di alcuni studenti, Apotema ha scritto alla lavagna le seguenti proprietà.

- |                             |                              |
|-----------------------------|------------------------------|
| 1. $b^0 = 1$ ,              | $\exp_b 0 = 1$ ,             |
| 2. $b^1 = b$ ,              | $\exp_b 1 = b$ ,             |
| 3. $b^{-1} = \frac{1}{b}$ , | $\exp_b(-1) = \frac{1}{b}$ , |

- |                                  |                                             |
|----------------------------------|---------------------------------------------|
| 4. $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$ ,    | $\exp_b(-x) = \frac{1}{\exp_b x}$ ,         |
| 5. $b^{x+y} = b^x b^y$ ,         | $\exp_b(x+y) = \exp_b x \exp_b y$ ,         |
| 6. $b^{x-y} = \frac{b^x}{b^y}$ , | $\exp_b(x-y) = \frac{\exp_b x}{\exp_b y}$ , |
| 7. $(b^x)^y = b^{xy}$ ,          | $\exp_{\exp_b x} y = \exp_b(xy)$ .          |

**Apotema:-** Le prime tre proprietà sono ovvie, nel senso che discendono immediatamente dal fatto che sugli interi la funzione esponenziale in base  $b$  coincide con le vecchie potenze in base  $b$ . Che cosa dire della proprietà 4?

**Fuoky:-** Anche quella valeva già per gli interi!

**Apotema:-** Tutte valevano già per gli interi! Il problema è quello di capire se valgono anche per i non interi!

**Geny:-** Considero la progressione aritmetica  $-x, 0, x$ . I tre numeri  $b^{-x}, 1, b^x$  devono essere in progressione geometrica e quindi 1 deve essere la media geometrica tra  $b^{-x}$  e  $b^x$ .

**Apotema:-** Vieni a scriverlo alla lavagna.

**Geny:-** ... Ma allora deve succedere che sia  $\sqrt{b^{-x}b^x} = 1$ , cioè  $b^{-x}b^x = 1$  e quindi  $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$  !

**Apotema:-** Impeccabile, Geny! Vedo che con le medie te la cavi egregiamente!

**Gioky:-** Perché lui è superiore alla media!

**Apotema:-** Ormai resta alla lavagna. Che cosa mi dici della 5?

**Geny:-** Beh, tenterei ancora con l'inserimento di medi... La funzione esponenziale in base  $b$  è quella che manda la progressione aritmetica

$$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

nella progressione geometrica

$$\dots, b^{-2}, b^{-1}, 1, b, b^2, \dots$$

e sugli interi sappiamo già che la proprietà vale. Cerco di vedere se la proprietà sopravvive all'inserimento di medi! Se inserisco più volte un medio tra due termini successivi delle due

progressioni, dopo un numero finito arbitrario di passi, arrivo a dire che la mia funzione esponenziale in base  $b$  manda una progressione del tipo

$$\dots, -2d, -d, 0, d, 2d, \dots$$

in una progressione geometrica del tipo

$$\dots, q^{-2}, q^{-1}, 1, q, q^2, \dots$$

**Normy:-** E perché?

**Geny:-** Le ragioni si saranno ridotte, ma la funzione continua a mandare lo zero in uno!

**Normy:-** Ok!

**Geny:-** Se adesso prendo due termini qualsiasi della progressione aritmetica, diciamo  $x = md$  e  $y = nd$ , allora abbiamo che  $x + y = md + nd = (m + n)d$ . Avremo allora che a  $x$  corrisponde  $b^x = q^m$ , a  $y$  corrisponde  $b^y = q^n$ , mentre a  $x + y$  corrisponde  $b^{x+y} = q^{m+n}$ . Ma  $q^{m+n} = q^m q^n$ , perché sappiamo che per gli esponenti interi questa regola vale, e quindi  $b^{x+y} = b^x b^y$ ! La 6 poi si può dimostrare in modo del tutto analogo!

**Scetty:-** Abbiamo visto che la proprietà vale a ogni livello dell'inserimento di medi, ma come possiamo dire che vale anche per i numeri che non vengono mai eguagliati da un medio?

**Geny:-** È lo stesso discorso dell'algoritmo dicotomico! Puoi avvicinarti a piacere a qualsiasi numero pur di aggiungere abbastanza medi e quindi verificare la formula per tanti decimali quanti vuoi!

**Furby:-** Non potevamo usare il fatto che per le frazioni sapevamo esprimere il valore della funzione esponenziale mediante una radice e poi usare il fatto che ogni numero si può approssimare con una frazione?

**Apotema:-** Certamente. Vuoi provarci tu?

**Furby:-** Ho detto così per dire...

**Apotema:-** Geny ha dimostrato la proprietà 5 facendo vedere che se vale per gli interi vale per ogni nuova progressione ottenuta inserendo dei medi e quindi per tutti i numeri razionali il cui denominatore è una potenza di 2. Si tratta infatti di numeri che consentono di approssimare a piacere ogni numero reale. Furby intende invece dire che si poteva procedere diversamente

**Normy:-** Non ho capito bene che cosa...

ancora una funzione esponenziale. Inoltre  $g(0) = \frac{f(0)}{a} = 1$  e quindi  $g$  è una funzione esponenziale pura. Ne segue che esiste un numero positivo  $b$  tale che  $g(x) = b^x$  e quindi  $\frac{f(x)}{a} = b^x$ , da

**Normy:-** Questo significa che tutte le funzioni esponenziali sono fatte così?

**Normy:-** Anche quella del decadimento radioattivo ?

**Normy:-** Anche quella della lastra semitrasparente?

**Rozzy:-** Ma lo capisci o no che ha detto tutte?

**Apotema:-** La prossima volta ricaveremo l'espressione della funzione esponenziale che manda una data progressione aritmetica in una data progressione geometrica...

**Apotema:-** ... e quella della funzione esponenziale che passa per due punti...

(Ormai nessuno ascolta più...)



## LEZIONE VI

**Apotema:-** Furby, vieni alla lavagna a mostrarci come hai trasformato le potenze razionali in radici per dimostrare un paio di proprietà delle funzioni esponenziali pure.

**Furby:-** Ho dimostrato solo una delle proprietà...

**Apotema:-** L'altra non sei riuscito a dimostrarla?

**Furby:-** L'altra... mi sono dimenticato...

**Apotema:-** Comincia col ricordarci come si definisce la funzione esponenziale in base  $b$ .

**Furby:-** Dunque... la funzione esponenziale in base  $b$ ... è quella funzione... dai reali nei reali positivi... monotona... che manda progressioni aritmetiche in progressioni geometriche... che in zero vale uno e che in uno vale  $b$ !

**Apotema:-** Però, te la sei cavata bene!

**Furby:-** Ma io sto attento in classe!

**Apotema:-** Anche se coi compiti... Ma torniamo al problema che vi avevo assegnato e che tu avevi proposto! Dovevate dimostrare che per due numeri razionali  $x$  e  $y$  vale la proprietà  $b^{x+y} = b^x b^y$ , che sappiamo valere per i numeri interi. Supponiamo quindi che siano  $x = m/n$  e  $y = p/q$ . Come procedi?

**Furby:-** Avevamo visto in classe che  $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$ . Allo stesso

modo sarà  $b^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{b^p}$ . A questo punto  $b^x b^y = \sqrt[n]{b^m} \cdot \sqrt[q]{b^p}$ . Devo ridurre i radicali allo stesso indice, no?

**Apotema:-** Lo chiedi a me?

**Furby:-** Allora... prendo come multiplo comune degli indici  $nq$ , per cui

$$\sqrt[n]{b^m} \cdot \sqrt[q]{b^p} = \sqrt[nq]{b^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{b^{np}} = \sqrt[nq]{b^{mq} b^{np}} = \sqrt[nq]{b^{mq+np}}.$$

Per quanto riguarda invece  $b^{x+y}$  abbiamo che

$$b^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = b^{\frac{mq+np}{nq}} = \sqrt[nq]{b^{mq+np}}.$$

**Normy:-** Lo stesso risultato!

**Apotema:-** Già, e quindi la proprietà  $b^{x+y} = b^x b^y$  vale per tutti gli esponenti razionali e, potendo approssimare a piacere ogni numero reale con numeri razionali, la regola vale per tutti i numeri.

**Scopry:-** In effetti, c'era qualcosa di incredibilmente somigliante fra il trovare l'indice comune di due radicali e il denominatore comune di due frazioni! E anche tra il fatto di poter moltiplicare indice del radicale ed esponente del radicando per uno stesso numero e il poter moltiplicare denominatore e numeratore di una frazione per uno stesso numero!

**Apotema:-** Proprio così, Scopry. Le radici non sono altro che un inutile baraccone complicato al posto di un semplice esponente e le regole di calcolo dei radicali sono solo una versione, inutilmente complicata nella forma, delle regole di calcolo dell'esponenziale applicate agli esponenti frazionari.

**Furby:-** Vado al posto?

**Apotema:-** Non ancora. Devi dimostrare che vale anche la proprietà  $(b^x)^y = b^{xy}$  per gli esponenti razionali. Prendi dunque  $x$  e  $y$  come prima e vedi di dimostrare l'uguaglianza.

**Furby:-** Comincio da destra, che mi sembra più semplice...

$$b^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}} = b^{\frac{mp}{nq}} = \sqrt[nq]{b^{mp}}.$$

$$\text{Adesso...} \left( b^{\frac{m}{n}} \right)^{\frac{p}{q}} = \left( \sqrt[n]{b^m} \right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left( \sqrt[n]{b^m} \right)^p} \dots$$

**Apotema:-** Non ti ricordi come si fa a elevare un radicale a una potenza?

**Furby:-** Mi sembra che si elevi a quella potenza quello che sta dentro alla radice...

**Apotema:-** Si chiama radicando.

**Furby:-** Ok! Allora...  $\sqrt[q]{\left( \sqrt[n]{b^m} \right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{b^{mp}}} = \sqrt[nq]{b^{mp}}$ . Incredibile! È

venuto davvero uguale!

**Apotema:-** Siamo stati fortunati!

**Furby:-** Adesso posso andare?

**Apotema:-** Non ancora! C'è pane per i tuoi denti! Torniamo al problema di trovare l'espressione della funzione esponenziale

che manda la progressione aritmetica

$$\dots, c - 2d, c - d, c, c + d, c + 2d, \dots$$

nella progressione geometrica

$$\dots, CQ^{-2}, CQ^{-1}, C, CQ, CQ^2, \dots$$

Eri stato sempre tu, Furby, a trovare la strada giusta, nel caso delle funzioni lineari. O sbaglio?

**Furby:-** Certo! Allora... Applico la funzione " $-c$ " e ottengo la progressione aritmetica

$$\dots, -2d, -d, 0, d, 2d, \dots,$$

poi applico la funzione " $/d$ " e arrivo così alla progressione aritmetica degli interi

$$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

E adesso...

**Fuory:-** Moltiplico per  $Q$ !

**Rozzy:-** Bravo! Così viene sbagliata!

**Furby:-** Applico la funzione esponenziale in base  $Q$ ! Ottengo così la progressione geometrica

$$\dots, Q^{-2}, Q^{-1}, 1, Q, Q^2, \dots$$

Non mi resta adesso che applicare la funzione " $\times C$ ", così arrivo alla progressione voluta

$$\dots, CQ^{-2}, CQ^{-1}, C, CQ, CQ^2, \dots$$

**Apotema:-** Dato un numero reale  $x$ , applichiamo quindi nell'ordine le funzioni " $-c$ ", " $/d$ ",  $\exp_Q$ , " $\times C$ " e otteniamo che

$$f(x) = CQ^{\frac{x-c}{d}}.$$

Siamo adesso in grado di ricavare l'espressione per la funzione che descrive il decadimento radioattivo o l'assorbimento della luce in una lastra semitrasparente. Cominciamo dal problema del decadimento radioattivo. Se  $T$  è il tempo di dimezzamento e indichiamo con  $R_0$  la quantità di elemento presente all'istante  $t_0$ , allora quando il tempo  $t$  varia in progressione aritmetica con ragione  $T$

$$t_0, t_0 + T, t_0 + 2T, t_0 + 3T \dots$$

la quantità corrispondente  $R(t)$  varia in progressione geometrica di ragione  $1/2$

$$R_0, R_0\left(\frac{1}{2}\right), R_0\left(\frac{1}{2}\right)^2, R_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 \dots$$

Qual è allora l'espressione per  $R(t)$ , Ovvv?

**Ovvv:-** In questo caso abbiamo che  $c = t_0$ ,  $C = R_0$ ,  $d = T$  e

$Q = \frac{1}{2}$ . La funzione cercata è allora

$$R(t) = R_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t-t_0}{T}}.$$

**Apotema:-** Esatto. Se poi poniamo  $t_0 = 0$  e usiamo la proprietà

$b^{-x} = \frac{1}{b^x}$ , possiamo riscrivere la funzione esponenziale nella forma

$$R(t) = R_0 2^{-\frac{t}{T}}.$$

**Ovvv:-** Mi sembra ovvio! La quantità  $R_0$  si dimezza tante volte quante volte il tempo che è passato è più grande del tempo di dimezzamento, cioè  $t$  piccolo diviso  $T$  grande volte!

**Apotema:-** È proprio qui il punto! Quello che tu dici essere ovvio, lo è solo quando  $t$  è un multiplo di  $T$ ! Che cosa significa che se sono passati 2.357 tempi di dimezzamento allora la quantità iniziale si è dimezzata 2.357 volte? Adesso lo sappiamo: significa che viene moltiplicata per 2 elevato alla  $-2.357$ , ma prima di avere definito le funzioni esponenziali per tutti i numeri reali questa frase non aveva senso!

**Ovvv:-** In effetti...

**Apotema:-** Come esempio ricalcoliamo qualcosa che avevamo già calcolato, con tanta fatica, qualche lezione fa. Se non sbaglio, vi avevo chiesto di calcolare che percentuale di carbonio 14 resta dopo 1000 anni, vero?

**Sekky:-** Proprio così, professore.

**Apotema:-** Vuoi dirmi, Sekky, quale valore avevamo usato per il tempo di dimezzamento del carbonio 14?

**Svelty:-** 5730 anni!

**Sekky:-** Confermo.

**Apotema:-** Poniamo allora  $R_0 = 100$  e  $T = 5730$ . La

percentuale rimasta è allora  $R(1000) = 100 \cdot 2^{\frac{1000}{5730}}$ . Fuori la calcolatrice! Quanto viene?

**Svelty:-** 88.61!

**Apotema:-** Rimane dunque l'88.61% della quantità iniziale.

**Sekky:-** Esattamente lo stesso valore ottenuto con l'algoritmo dell'inserimento dei medi!

**Apotema:-** Adesso dovrebbe essere chiaro quello che vi avevo anticipato. La calcolatrice ha incorporato un algoritmo equivalente a quello dell'inserimento dei medi. Diverso e più efficiente, ma equivalente. Soltanto che possiamo ottenere il risultato con un unico tasto: il tasto che calcola la funzione esponenziale con base positiva qualsiasi ed esponente qualsiasi!

**Normy:-** Comodo!

**Bronty:-** Ogni comodità diventa una schiavitù... Adesso ci tocca sapere anche le funzioni esponenziali...

**Apotema:-** Contieni il tuo entusiasmo, Bronty, ci sono ancora le funzioni logaritmiche e quelle potenze!

**Normy:-** E il problema della lastra semitrasparente?

**Apotema:-** Questa volta avevamo non un tempo, ma uno spessore di dimezzamento, che chiamiamo  $\sigma$ . Quando lo spessore  $s$  varia in progressione aritmetica di ragione  $\sigma$

$$0, \sigma, 2\sigma, 3\sigma, \dots$$

l'intensità luminosa  $I$  varia in progressione geometrica di ragione  $1/2$

$$I_0, \frac{1}{2}I_0, \frac{1}{4}I_0, \frac{1}{8}I_0, \dots$$

Questa volta la funzione esponenziale diventa

$$I(s) = I_0 \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{s}{\sigma}} \quad \text{oppure} \quad I(s) = I_0 2^{-\frac{s}{\sigma}}.$$

**Normy:-** Uguale all'altra!

**Apotema:-** Inevitabilmente, visto che in tutti e due i casi abbiamo usato una progressione geometrica di ragione  $1/2$ ! Ma

ditemi adesso qual è la forma della funzione esponenziale  $f$  con  $f(x_1) = y_1$  e  $f(x_2) = y_2$ .

**Svelty**:- Come per le lineari! Basta considerare la progressione aritmetica di termine di riferimento  $x_1$  e di ragione  $x_2 - x_1$  e la progressione geometrica di termine di riferimento  $y_1$  e ragione

$$\frac{y_2}{y_1}!$$

**Apotema**:- Svelty ci ricorda che possiamo estendere una coppia di numeri a una progressione. Otteniamo allora l'espressione

$$f(x) = y_1 \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}.$$

**Normy**:- Se ho ben capito con quella formula possiamo scrivere subito una funzione esponenziale sapendo solo i valori che assume in due numeri, vero?

**Apotema**:- Vero. Per esempio, la funzione esponenziale con  $f(2) = 4$  e  $f(5) = 8$  ha la forma

$$f(x) = 4 \left( \frac{8}{4} \right)^{\frac{x-2}{5-2}} = 4 \cdot 2^{\frac{x-2}{3}}.$$

In effetti,  $f(2) = 4 \cdot 2^0 = 4$  e  $f(5) = 4 \cdot 2^{\frac{5-2}{3}} = 4 \cdot 2^1 = 8$ .

**Normy**:- Facile!

**Apotema**:- Ma vediamo i grafici delle funzioni esponenziali. E cominciamo dalle funzioni esponenziali pure, cioè quelle del tipo  $y = b^x$ . Per comprendere l'andamento dei loro grafici è bene conoscere una disuguaglianza tra la media aritmetica e quella geometrica. Secondo voi, se di due numeri calcolo la media aritmetica e quella geometrica, che relazione c'è tra le due medie?

**Normy**:- Sono diverse!

**Apotema**:- Un po' poco. E poi non è detto che siano diverse...

**Ovvy**:- È chiaro che se i due numeri sono uguali allora le due medie sono uguali! La radice del quadrato di un numero...

**Apotema**:- Positivo!

**Ovvy**:- ... la radice del quadrato di un numero positivo è uguale

al numero stesso, così come la metà del suo doppio!

**Normy:-** Ma cosa stai dicendo?

**Apotema:-** Ovvv vuole dire che la media geometrica tra due numeri uguali  $a$  vale  $\sqrt{a^2}$ , che fa di nuovo  $a$ , così come la loro media aritmetica, che vale  $\frac{a+a}{2}$ , che fa ancora  $a$ .

**Normy:-** Ma chi è che si mette a fare la media di due numeri uguali?

**Apotema:-** Intenzionalmente forse nessuno, ma può capitare. Sarebbe come commentare la proprietà  $a+0=a$  chiedendosi chi mai si metterebbe a sommare zero! Eppure sai bene quante volte usi questa proprietà dell'addizione ogni volta che porti un addendo da un membro all'altro di una equazione! Chiedo invece a Ovvv se vale anche il viceversa, e cioè se dall'uguaglianza della media aritmetica e quella geometrica di due numeri possiamo dedurre che i due numeri sono uguali.

**Ovvv:-** Direi proprio di sì...

**Apotema:-** Non ti ho chiesto di scommettere, ma di darmi una risposta! Forse è meglio se scrivi alla lavagna!

**Ovvv:-** Stiamo supponendo che sia  $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$ , no?

**Apotema:-** Sì, e ti consiglio di scrivere  $2\sqrt{ab} = a+b$  e poi di portare tutto a secondo membro.

**Ovvv:-** Sembrava più ovvio... Allora  $a+b-2\sqrt{ab}=0$ . E poi?

**Apotema:-** Un gioco di prestigio: è un quadrato perfetto!

**Ovvv:-** Ma  $a$  e  $b$  non sono quadrati!

**Apotema:-** Sono positivi e quindi sono certamente dei quadrati!

**Ovvv:-** Ah! Di  $\sqrt{a}$  e  $\sqrt{b}$ ! Ok,  $a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ !

**Apotema:-** E deve fare zero!

**Ovvv:-** Allora deve essere  $\sqrt{a}=\sqrt{b}$  e quindi  $a=b$ !

**Normy:-** Davvero un gioco di prestigio, non mi ha chiarito nulla! E poi nell'algoritmo dell'inserimento dei medi i due numeri sono sempre diversi!

**Apotema:-** Sì, hai ragione, sono quasi sempre diversi!

**Normy:-** Perché quasi?

**Apotema:-** La funzione esponenziale pura in base 1, vale sempre 1! Se  $f(0)=f(1)=1$ , allora, la progressione in uscita vale

costantemente 1. I medi che inserisci valgono sempre 1. Stessa cosa per le funzioni lineari costanti.

**Normy:-** Non ci avevo pensato!

**Apotema:-** Ma che relazione sussiste tra le medie quando i numeri sono diversi?

**Svelty:-** Mi viene da dire che la media geometrica è minore di quella aritmetica...

**Apotema:-** Come te ne sei convinto?

**Svelty:-** Con un po' di calcoli...

**Apotema:-** È già qualcosa, ma sai bene che non è sufficiente!

**Svelty:-** Lo so, ma forse si può rifare il trucco algebrico di prima!

**Apotema:-** Si può e funziona. Ma preferisco convincervi con una dimostrazione geometrica.

(Apotema disegna un triangolo rettangolo.)

**Apotema:-** Spero che qualcuno di voi si ricordi del cosiddetto secondo teorema di Euclide.

**Rozzy:-** Mi sembra che c'entrassero le proiezioni dei cateti...

**Sekky:-** In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

**Apotema:-** Grazie, Sekky. Se chiamo  $h$  la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa e  $a$  e  $b$  le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, allora il teorema afferma che  $h^2 = ab$ .

**Svelty:-** Ho capito! Allora  $h = \sqrt{ab}$  e così l'altezza è la media geometrica delle proiezioni dei cateti!

**Apotema:-** E come possiamo invece rappresentare la loro media aritmetica?

**Normy:-** Metà dell'ipotenusa!

**Apotema:-** Molto bene! Partiamo ora da due numeri positivi  $a$  e  $b$  e consideriamo due segmenti consecutivi  $AB$  e  $BC$  che misurano  $a$  e  $b$  rispetto a una certa unità di misura. Si tratta di far saltare fuori il triangolo rettangolo di ipotenusa  $AC$  e che ha  $B$  come piede dell'altezza. Come si fa?

**Normy:-** Si innalza la perpendicolare in  $B$ !

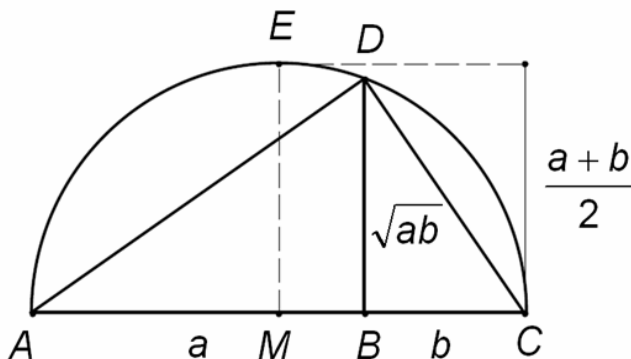
**Apotema:-** Ok, ma in che punto della perpendicolare si trova il vertice dell'angolo retto?

**Sekky:-** Sulla semicirconferenza di diametro  $AC$ !

**Apotema:-** Bravo Sekky! Con centro il punto medio  $M$  di  $AC$ , tracciamo la semicirconferenza di diametro  $AC$ , che interseca la

perpendicolare nel punto  $D$ . Ora il segmento  $BD$  misura  $\sqrt{ab}$ , mentre il raggio della circonferenza è la metà dell'ipotenusa e misura  $\frac{a+b}{2}$ .

**Normy:-** Ho capito! L'altezza è sempre minore del raggio e quindi la media geometrica è minore di quella aritmetica!



**Apotema:-** Tranne quando...

**Svelty:-** Tranne quando  $M$  coincide con  $B$ , e cioè  $a = b$ , nel qual caso l'altezza è un raggio e le due medie coincidono, e solo in quel caso!

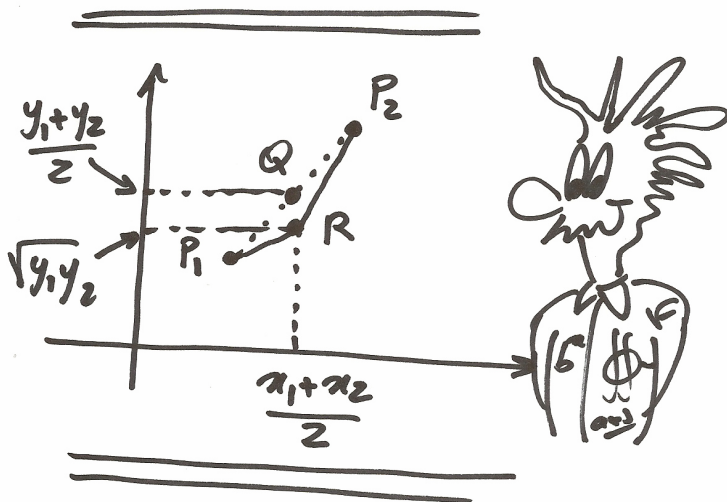
**Apotema:-** Questo è il risultato che ci interessa: la media geometrica è sempre minore o uguale a quella aritmetica e si ha l'uguaglianza solo se i due numeri sono uguali. Il teorema si può estendere al caso di più numeri, ma a noi basta questo.

**Dubby:-** Ma non dovevamo vedere i grafici delle funzioni esponenziali?

**Apotema:-** È proprio per i grafici che ci serve questa disuguaglianza! Consideriamo la funzione esponenziale in base  $b$ ,  $y = b^x$ . In corrispondenza degli interi otteniamo la progressione geometrica  $\dots b^{-2}, b^{-1}, 1, b, b^2, \dots$ , che sappiamo essere crescente se  $b > 1$ , decrescente se  $0 < b < 1$  e costantemente uguale a 1 se  $b = 1$ . Ma che cosa succede al grafico quando inseriamo dei medi tra due punti? Nel caso delle funzioni lineari avevamo che tra due punti del grafico  $P_1(x_1, y_1)$  e

$P_2(x_2, y_2)$  si inseriva il punto  $Q\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ , che è proprio il punto medio del segmento  $P_1P_2$ . Nel caso delle funzioni esponenziali inseriamo invece il punto  $R\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \sqrt{y_1y_2}\right)$ .

Siccome  $\sqrt{y_1y_2} < \frac{y_1+y_2}{2}$ , il punto  $R$  sta sotto il punto  $Q$  e la spezzata  $P_1RP_2$  è concava verso l'alto.

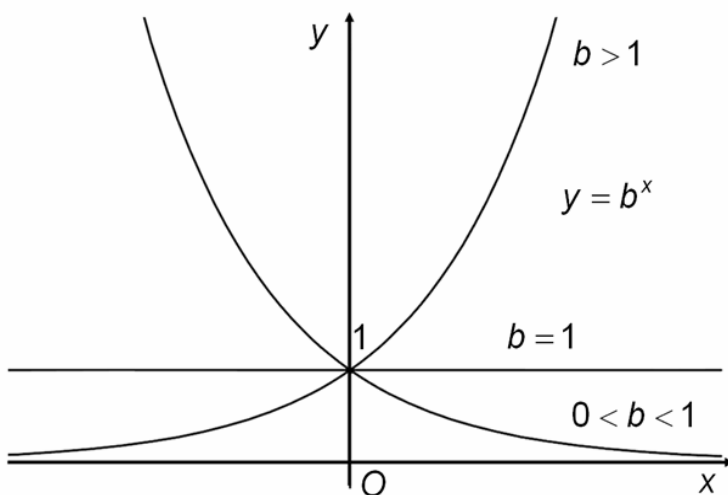


Questa proprietà si conserva ad ogni livello di inserimento dei medi e i grafici delle funzioni esponenziali, se escludiamo quello della retta orizzontale che corrisponde a  $b=1$ , sono concavi verso l'alto. Inoltre passano tutti per il punto  $(0,1)$ . Notate che si avvicinano sempre più all'asse delle ascisse verso sinistra se  $b > 1$  e verso destra se  $0 < b < 1$ .

**Normy:-** E nel caso generale?

**Apotema:-** Lascio a voi di capire come sono fatti i grafici di una funzione esponenziale nel caso generale ma, prima ancora, vi

chiedo di confrontare tra loro coppie di grafici di funzioni esponenziali pure con basi diverse ed entrambe maggiori o minori di 1. Provate anche a tracciare il grafico della funzione che descrive il decadimento radioattivo!



**Bronty:-** Tutto qua?

**Apotema:-** Tutto qua. Ovviamente non è vietato visualizzare la situazione con qualche software matematico, ma provate prima a indovinare da soli! Aspettate... Un'altro problema! Ditemi che cos'è la composizione di una funzione lineare con una funzione esponenziale!

**Sekky:-** Professore, mi sembra che non abbia firmato il registro!

**Apotema:-** Vero! Grazie Sekky!



## LEZIONE VII

**Svelty:-** Prof, posso venire io a correggere il compito?

**Apotema:-** Un volontario? Oggi pioverà!

**Svelty:-** Dovevamo dire che cos'è la composizione di una funzione lineare con una esponenziale.

**Sekky:-** Prima c'erano i grafici delle funzioni esponenziali

**Svelty:-** Ma io volevo cominciare da quello!

**Apotema:-** Vediamo.

**Svelty:-** L'ho risolto anche col metodo di Sekky!

**Apotema:-** Il metodo di Sekky?

**Svelty:-** Quello dell'altra volta!

**Apotema:-** Vedi di essere più chiaro e comincia a esporre la tua soluzione.

**Svelty:-** Ok, prof! Siccome le funzioni lineari vanno dai reali nei reali e quelle esponenziali dai reali nei reali positivi, una funzione lineare si può comporre con una esponenziale e si ottiene una funzione che va dai reali nei reali positivi.

**Apotema:-** Giusto.

**Svelty:-** Abbiamo poi già visto che la composizione di due funzioni monotone è monotona. Inoltre, poiché una funzione lineare manda progressioni aritmetiche in progressioni aritmetiche e una funzione esponenziale manda progressioni aritmetiche in progressioni geometriche, ecco che la loro composizione manda progressioni aritmetiche in geometriche. Dunque la composizione è una funzione esponenziale!

**Apotema:-** Bravissimo!

**Svelty:-** Poi l'ho risolto anche come aveva fatto Sekky!

**Apotema:-** Cioè?

**Svelty:-** Se  $f$  e  $g$  sono rispettivamente una funzione lineare e una esponenziale, allora  $f(x) = a + bx$  e  $g(x) = AB^x$ . Ma allora  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(a + bx) = AB^{a+bx}$ .

**Normy:-** E quella che funzione è?

**Svelty:-** Non ho finito! Usando le proprietà delle funzioni esponenziali posso scrivere che  $B^{a+bx} = B^a B^{bx} = B^a (B^b)^x$  e quindi che  $(g \circ f)(x) = (AB^a)(B^b)^x$ , che è una funzione

esponenziale!

**Apotema:-** Che dire? Impeccabile, Svelty!

**Dubby:-** E se invece componiamo una funzione esponenziale con una lineare?

**Svelty:-** Viene una funzione che non è di nessuno dei quattro tipi!

**Dubby:-** Come fai a dirlo con tanta sicurezza?

**Svelty:-** La prima manda progressioni aritmetiche in geometriche e la seconda non si sa che cosa faccia con le geometriche!

**Dubby:-** Appunto! Non lo sai!

**Svelty:-** Lo vedo subito! Se  $f(x) = ab^x$  e  $g(x) = A + Bx$ , allora  $g(f(x)) = A + Bf(x) = A + B(ab^x)$ , che non è né una funzione lineare né una funzione esponenziale!

**Dubby:-** A meno che non sia  $A = 0$ !

**Apotema:-** E  $B > 0$ !

**Svelty:-** Urca! Dubby ha ragione! Allora se componiamo una funzione esponenziale con una funzione lineare pura si ottiene ancora una funzione esponenziale!

**Sekky:-** Se la funzione lineare pura ha pendenza positiva!

**Apotema:-** Non dovrebbe essere una novità! Quando abbiamo dedotto la forma della funzione esponenziale che manda una data progressione aritmetica in una data progressione geometrica, come ultimo passo abbiamo applicato una funzione lineare pura!

**Svelty:-** Posso andare al posto?

**Apotema:-** E i grafici?

**Svelty:-** Mi sono concentrato sul problema della composizione...

**Apotema:-** Ho capito. Cerca di non sciuparti! Chi viene a mostrarmi come sono fatti i grafici delle funzioni esponenziali?

**Scopry:-** Vengo io!

**Apotema:-** Sentiamo Scopry!

**Scopry:-** Come prima cosa dovevamo studiare cosa succedeva ai grafici delle funzioni esponenziali pure al variare della base...

Ho usato il Derive per fare i grafici delle funzioni  $y = 2^x$  e  $y = 3^x$  e ho visto che per gli  $x$  positivi il grafico di  $y = 3^x$  sta sopra a quello di  $y = 2^x$ , mentre per gli  $x$  negativi succede il contrario.

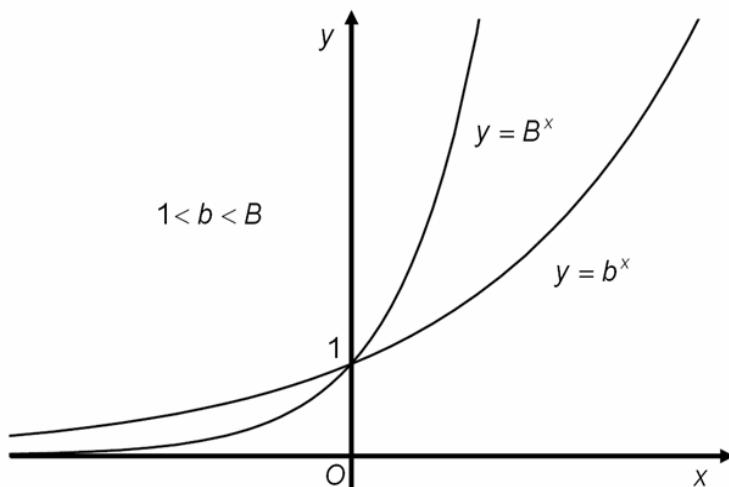
**Apotema:-** E te lo sei spiegato?

**Scopry:-** Certamente! Se ho due basi diverse  $b$  e  $B$ , tutte e due maggiori di uno e con  $b < B$ , allora per gli interi positivi  $n$  si ha

che  $b^n < B^n$ , mentre per gli interi negativi, siccome  $b^{-n} = \left(\frac{1}{b}\right)^n$ ,

è come passare alle basi reciproche con gli esponenti positivi e quindi la situazione si inverte! Se poi faccio la media geometrica tra due numeri maggiori di altri due, ottengo certamente un valore maggiore della media degli altri due!

**Normy:-** Questa non l'ho capita!



**Apotema:-** Scopry voleva dire che se considero due valori  $x_1$  e  $x_2$  positivi, allora si ha che  $b^{x_1} < B^{x_1}$  e  $b^{x_2} < B^{x_2}$  e, inserendo un medio  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$  si avrà che  $b^x = \sqrt{b^{x_1} b^{x_2}}$  e  $B^x = \sqrt{B^{x_1} B^{x_2}}$ ,

con  $b^x < B^x$ . La disuguaglianza continua quindi a valere anche inserendo dei medi. Un fatto analogo succede per gli  $x$  negativi.

**Normy:-** E quindi la stessa relazione che vale sui punti di ascissa intera continua a valere per gli altri punti dei grafici, vero?

**Scopry:-** È quello che ho detto io!

**Apotema:-** E nel caso generale?

**Scopry:-** Una funzione esponenziale ha la forma  $y = ab^x$ , dove  $a$  è il valore in zero. Basta moltiplicare per  $a$  tutte le ordinate del grafico di  $y = b^x$ ! I grafici hanno lo stesso andamento di prima! È come aver soltanto cambiato la scala sull'asse delle ordinate!

**Apotema:-** Sai allora dirmi subito quali sono le funzioni esponenziali invertibili?

**Scopry:-** Tutte tranne quelle costanti!

**Apotema:-** E quindi, quali?

**Scopry:-** Quelle con  $b \neq 1$ !

**Apotema:-** Bene, Scopry. Vai pure al posto.

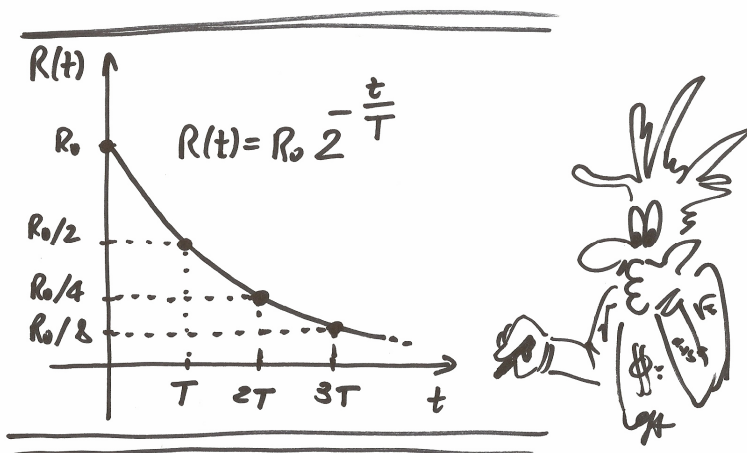
**Scopry:-** C'era ancora una cosa da fare!

**Apotema:-** Che cosa?

**Scopry:-** Disegnare il grafico della funzione esponenziale che descrive il decadimento radioattivo!

**Apotema:-** Allora fai il disegno, spiegando come hai proceduto.

**Scopry:-** Ho evidenziato in ascissa i punti  $0, T, 2T, 3T, \dots$  e in ordinata i punti  $R_0, \frac{R_0}{2}, \frac{R_0}{4}, \frac{R_0}{8}, \dots$  poi ho collegato i punti con quelle coordinate con una curva concava verso l'alto. -



**Apotema:-** Bravo Scopy! Avete capito tutti? Puoi andare al posto con onore!

**Gioky:-** E adesso?

**Apotema:-** Pensaci un attimo. A che punto siamo?

**Gioky:-** Dobbiamo trovare la forma delle funzioni logaritmiche!

**Apotema:-** Già.

**Sekky:-** E cominceremo dalle funzioni logaritmiche pure, vero professore?

**Apotema:-** Vero. Ma... quali sono le funzioni logaritmiche pure?

**Svelty:-** Quelle che in uno valgono zero!

**Apotema:-** Esatto!

**Lenty:-** E perché?

**Apotema:-** Ormai dovrebbe essere chiaro. Dove prendiamo le progressioni aritmetiche l'elemento neutro è lo zero, dove invece prendiamo progressioni geometriche, l'elemento neutro è l'uno. Siccome le funzioni logaritmiche mandano progressioni geometriche in progressioni aritmetiche, le funzioni logaritmiche "speciali" saranno quelle che mandano l'uno nello zero.

**Normy:-** Allora le potenze pure saranno quelle che in uno valgono uno!

**Apotema:-** Proprio così. Ma torniamo al nostro problema. Consideriamo una funzione logaritmica  $f$ , con  $f(1) = 0$ . Questa funzione manderà una progressione geometrica del tipo

$$\dots, q^{-2}, q^{-1}, 1, q, q^2, \dots$$

in una progressione aritmetica del tipo

$$\dots, -2d, -d, 0, d, 2d, \dots$$

Bene, quando si parla di funzioni logaritmiche si esclude il caso in cui la progressione aritmetica sia costantemente uguale a zero. Si può allora sempre scegliere una ragione opportuna  $b$  per la progressione geometrica in ingresso in modo che la ragione della progressione in uscita valga uno. In altre parole, esiste sempre un numero positivo  $b$ , diverso da 1, tale che  $f(b) = 1$ .

**Dubby:-** Perché diverso da 1?

**Apotema:-** Perché in 1 la funzione vale 0!

**Scetty:-** E cosa ce lo garantisce che questo numero esista?

**Apotema:-** Potrei arrivare a determinare quel numero con un processo infinito di inserimento di medi, ma al punto in cui siamo

arrivati c'è una strada molto più comoda. La funzione inversa della funzione logaritmica pura che stiamo considerando, in zero vale uno...

**Svelty**:- Allora è una funzione esponenziale pura!

**Apotema**:- Esatto. E quindi è una funzione esponenziale in una certa base  $b$ . Dunque  $f^{-1}(1) = b$  e quindi  $f(b) = 1$ .

**Normy**:- Vero!

**Apotema**:- Consideriamo allora la nostra funzione logaritmica pura  $f$ , con  $f(1) = 0$  e  $f(b) = 1$ . Questa funzione manda la progressione geometrica

$$\dots, b^{-2}, b^{-1}, 1, b, b^2, \dots$$

nella progressione aritmetica degli interi

$$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

e la chiamiamo funzione logaritmica in base  $b$ .

**Sekky**:- Allora, professore, la funzione logaritmica in base  $b$  è l'inversa della funzione esponenziale in base  $b$ !

**Apotema**:- Giustissimo, Sekky, ma voglio farvi riflettere su una cosa importante. Avremmo potuto introdurre prima le funzioni logaritmiche e poi quelle esponenziali. Usando l'algoritmo dell'inserimento dei medi avrei potuto farvi vedere, senza ricorrere alle funzioni esponenziali pure, che esiste sempre un numero positivo  $b$  in cui la funzione logaritmica vale uno. È solo per motivi legati alla vostra storia scolastica e alla storia della matematica che si è soliti introdurre le funzioni logaritmiche come funzioni inverse delle funzioni esponenziali. Voi avete imparato fin da bambini le funzioni esponenziali, almeno nel caso dell'esponente intero positivo! Perciò le trovate più naturali di quelle logaritmiche, ma questo è un fatto accidentale e per nulla necessario. Vi farò vedere addirittura che i nostri organi di senso invece realizzano delle funzioni logaritmiche!

**Dormy**:- Cosa?! I nostri organi di senso calcolano le funzioni logaritmiche?!

**Asy**:- Allora possiamo fare a meno della calcolatrice!

**Rompy**:- I miei organi di senso invece calcolano delle funzioni esponenziali!

**Bronty**:- L'ho sempre detto che sei fatto alla rovescia, Rompy!

**Apotema**:- Adesso basta! Vi ho detto che cos'è una funzione

logaritmica in base  $b$ . È una funzione  $f$  dai reali positivi nei reali, monotona, che manda progressioni geometriche in aritmetiche, con  $f(1)=0$  e  $f(b)=1$ . Se  $f(x)=y$ , diciamo che  $y$  è il logaritmo in base  $b$  di  $x$  e scriviamo  $y = \log_b x$ .

**Normy:-** Ecco che cos'è il tasto  $\log$  sulla mia calcolatrice!

**Apotema:-** Attenzione! Alcune calcolatrici hanno un tasto del tipo  $\log_y x$ , che consente di calcolare il logaritmo in qualsiasi base ammissibile di qualsiasi numero positivo, mentre altre calcolatrici hanno solo un tasto per la funzione logaritmica in base dieci e uno per quella nella base naturale!

**Gioky:-** E quale sarebbe la base naturale?

**Apotema:-** Un numero irrazionale che vale un po' meno di 3 e che incontrerete molte volte in questo corso. Ma non voglio parlarvene adesso. Vi dirò solo che, di solito, sulle calcolatrici si indica semplicemente con  $\log$  il tasto che calcola il logaritmo in base dieci di un numero e con  $\ln$  quello che calcola il logaritmo naturale.

**Dubby:-** E come facciamo a saperlo?

**Apotema:-** Si spera che uno abbia conservato il manuale della calcolatrice... In questo caso, comunque, possiamo facilmente controllare. La funzione logaritmica in base dieci manda la progressione delle potenze di 10

$$\dots 10^{-2}, 10^{-1}, 1, 10, 10^2, \dots$$

nella progressione dei numeri interi

$$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Quanto vale  $\log 10$ , Normy?

**Normy:-** Vale uno!

**Apotema:-** Chi ha sulla calcolatrice il tasto  $\log$  può allora verificare in un attimo che si tratti del logaritmo decimale.

**Normy:-** Esatto! Fa uno!

**Gioky:-** Io ho il tasto  $\log_y x$ !

**Dubby:-** E se uno ha solo i tasti  $\log$  e  $\ln$  come fa a calcolare le funzioni logaritmiche in una base diversa da 10 e da quell'altro numero?

**Apotema:-** Lo vedremo tra poco. Cominciamo con le proprietà principali delle funzioni logaritmiche. Anche in questo caso

possiamo procedere partendo direttamente dalla definizione di funzione logaritmica in base  $b$  oppure usare il fatto che si tratta della funzione inversa della funzione esponenziale in base  $b$ , di cui conosciamo le proprietà. In quest'ultimo caso mi basta tener presente che affermare che  $y = \log_b x$  equivale ad affermare che  $b^y = x$ . Quanto fa  $\log_b 1$ ?

**Svelty**:- Zero! Perché  $b^0 = 1$ !

**Apotema**:- Chiaro per tutti? La funzione esponenziale in base  $b$  manda 0 in 1 e così la funzione logaritmica in base  $b$  manda 1 in 0. Adesso vi scrivo solo un membro delle uguaglianze che esprimono le proprietà più importanti delle funzioni logaritmiche e poi cercheremo di completarle insieme.

E Apotema scrive alcune formule.

1.  $\log_b 1 = 0$  ;
2.  $\log_b b = ?$  ;
3.  $\log_b \frac{1}{b} = ?$  ;
4.  $\log_b \frac{1}{x} = ?$  ;
5.  $\log_b xy = ?$  ;
6.  $\log_b \frac{x}{y} = ?$  ;
7.  $\log_b x^y = ?$  .

**Apotema**:- Vediamo la seconda uguaglianza. Chi mi sa dire cosa scrivere dopo l'uguale?

**(Quasi tutti)**:- Uno!

**Apotema**:- Ovvio, no? Se  $b^1 = b$  allora  $\log_b b = 1$ ! Passiamo alla terza.

**Svelty**:- Meno uno! Perché fare il reciproco è come elevare alla meno uno!

**Apotema**:- Anche questa era facile. Siccome  $b^{-1} = \frac{1}{b}$ , allora

$\log_b \frac{1}{b} = -1$ . Vi faccio notare che le prime tre proprietà

derivavano immediatamente dalle progressioni che definiscono la funzione logaritmica in base  $b$ . E la quarta? (Silenzio).

**Apotema:-** Forse non è chiaro quello che vi viene chiesto di trovare. Voglio esprimere  $\log_b \frac{1}{x}$  in termini di  $\log_b x$ .

**Svelty:-** Viene  $-\log_b x$ ! Perché se cambio segno all'esponente ottengo il reciproco!

**Normy:-** Capito niente!

**Apotema:-** Vi insegno come ragionare in termini della funzione esponenziale. Se  $u = \log_b x$ , questo significa che  $x = b^u$ , ma allora  $\frac{1}{x} = \frac{1}{b^u} = b^{-u}$  e quindi  $\log_b \frac{1}{x} = -u$ , cioè  $\log_b \frac{1}{x} = -\log_b x$ .

Esempio banale:

$$\log \frac{1}{1000} = \log 10^{-3} = -3 \text{ e } \log 1000 = \log 10^3 = 3.$$

**Normy:-** Ok, prof!

**Apotema:-** Veniamo adesso alla numero 5. Viene alla lavagna Gioky. Prova e ragionare come ti ho detto e poni  $u = \log_b x$  e  $v = \log_b y$ . Vediamo come te la cavi.

**Gioky:-** Allora...

**Apotema:-** Esprimi  $x$  e  $y$  mediante l'esponenziale in base  $b$  e vedi cosa succede al loro prodotto.

**Gioky:-** Se  $u = \log_b x$ , allora  $x = b^u$ , mentre se  $v = \log_b y$ , allora  $y = b^v$ . Allora abbiamo che  $xy = b^u b^v$ , che fa  $b^{u+v}$ ...

**Apotema:-** Ma se  $xy = b^{u+v}$ , allora...

**Gioky:-** Ah! Allora  $\log_b xy = u + v$ !

**Apotema:-** Ma chi sono  $u$  e  $v$ ?

**Gioky:-** Ok,  $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$ !

**Apotema:-** Esatto. Il logaritmo di un prodotto è la somma dei logaritmi. È questa la proprietà chiave dei logaritmi e il motivo principale per cui furono introdotti.

**Lenty:-** Io non ho ben capito...

**Apotema:-** Un altro esempio banale coi logaritmi decimali. Se  $x = 100$  e  $y = 10000$ , allora  $xy = 1000000$ . Ma, se evidenzio le

potenze di dieci, posso scrivere che  $x = 10^2$  e  $y = 10^4$ , mentre  $xy = 10^2 10^4 = 10^{2+4} = 10^6$ . Ne deduco che  $\log x = 2$ ,  $\log y = 4$  e  $\log xy = 6 = 2 + 4 = \log x + \log y$ .

**Lenty**:- Adesso va un po' meglio...

**Apotema**:- Calcolatrice alla mano, ditemi quanto fa  $\log 2$ .

**Svelty**:- 0.3010299957!

**Apotema** (dopo aver scritto il numero alla lavagna): - Adesso via la calcolatrice! Quanto fa  $\log 200$ ?

(Silenzio).

**Geny**:- 2.3010299957!

**Apotema**:- Bravo Geny!

**Normy**:- Ma... ha solo sommato 2!

**Furby**:- Ho capito! 200 è  $2 \times 100$  e così  $\log 200 = \log 2 + \log 100$ , ma  $\log 100$  fa 2!

**Normy**:- Però  $\log 2$  non si faceva a mente!

**Apotema**:- Dovendolo stimare, che cosa avresti detto?

**Svelty**:- Siccome 2 è compreso tra 1 e 10, e cioè tra  $10^0$  e  $10^1$ , allora  $\log 2$  è compreso tra 0 e 1!

**Apotema**:- Si poteva fare di meglio. Voi che siete degli informatici sapete bene che  $2^{10}$ , il kilo dell'informatica, vale 1024, no?

**(Molti)**:- Sì!

**Apotema**:- Bene. Allora  $2^{10} \cong 10^3$ . Se eleviamo ambo i membri alla  $1/10$ , otteniamo che  $2 \cong 10^{3/10}$  e quindi che  $\log 2 \cong 3/10 = 0.3$ .

**Normy**:- Però!

**Apotema**:- Ma ritorniamo alle proprietà dei logaritmi. Gioky, ormai che sei qui, vedi di trovare la risposta della numero 6.

**Gioky**:- A occhio sarà  $\log_b x - \log_b y$ , perché in un quoziente gli esponenti si sottraggono!

**Apotema**:- Esatto, ma fai i passaggi in dettaglio.

**Gioky**:- Se  $u = \log_b x$ , allora  $x = b^u$ , mentre se  $v = \log_b y$ ,

allora  $y = b^v$ . Questa volta abbiamo che  $\frac{x}{y} = \frac{b^u}{b^v} = b^{u-v}$  e quindi

che  $\log_b \frac{x}{y} = u - v = \log_b x - \log_b y$  !

**Apotema:-** Ormai è tua anche l'ultima, Gioky!

**Gioky:-** Questa mi sa che sia più difficile...

**Apotema:-** Stesso metodo! Poni  $u = \log_b x$  ...

**Gioky:-** Se  $u = \log_b x$  allora  $x = b^u$  e...  $x^y = (b^u)^y = b^{uy}$  ...

**Apotema:-** Quindi?

**Gioky:-** Quindi  $\log_b x^y = uy = y \log_b x$  !

**Apotema:-** Proprio così, l'esponente diventa un fattore!

**Lenty:-** Un esempietto?

**Apotema:-** Se  $x = 100$  e  $y = 4$ , allora  $x^y = 100^4$ , ma  $\log 100 = \log 10^2 = 2$ , mentre, siccome  $(100)^4 = (10^2)^4 = 10^8$ ,  $\log x^y = \log 10^8 = 8 = 4 \times 2 = y \log x$ .

**Normy:-** Non ci ha detto come calcolare con la calcolatrice i logaritmi in base qualsiasi!

**Apotema:-** Ormai sta per suonare. Vedete di imparare per bene le proprietà dei logaritmi!



## LEZIONE VIII

**Sekky:-** Professore, dovevamo vedere come calcolare i logaritmi in base qualsiasi anche se la calcolatrice ci fornisce solo i logaritmi in base dieci o quelli naturali.

**Apotema:-** Certo, Sekky. Vediamo oggi le cosiddette formule per il cambio di base, sia per le funzioni esponenziali che per quelle logaritmiche. Comincio con una domanda: quanto fa, secondo voi,  $\log_a a^x$ ?

**Svelty:-** Fa  $x$ !

**Apotema:-** Giusto.

**Lenty:-** Perché fa  $x$ ?

**Svelty:-** Perché se parto da un numero  $x$ , calcolo la funzione esponenziale in base  $a$  e poi al risultato applico la funzione logaritmica in base  $a$ , che è la sua inversa, allora ottengo di nuovo  $x$ !

**Apotema:-** Chiaro? Si tratta di una proprietà molto più generale. Se ho una funzione  $f : A \rightarrow B$ , invertibile, e considero la sua inversa  $f^{-1} : B \rightarrow A$ , allora  $f^{-1}(f(a)) = a$ .

**Sekky:-** La funzione identità, che ha l'uscita uguale all'ingresso!

**Dubby:-** Ma allora anche  $f(f^{-1}(b)) = b$ !

**Apotema:-** Certo, Dubby. Infatti, quanto fa  $a^{\log_a x}$ ?

**Dubby:-** Fa ancora  $x$ , direi.

**Apotema:-** Esatto, Dubby, ma c'è una piccola differenza. La composizione di  $f$  con  $f^{-1}$  va da  $A$  in  $A$  ed è la funzione identità sull'insieme  $A$ , mentre la composizione di  $f^{-1}$  con  $f$  va da  $B$  in  $B$  ed è la funzione identità sull'insieme  $B$ !

**Normy:-** E allora? Non capisco...

**Apotema:-** La funzione  $y = \log_a a^x$  è la composizione della funzione esponenziale in base  $a$  con la funzione logaritmica in base  $a$  e va quindi dai reali nei reali. Ne segue che  $\log_a a^x = x$  per ogni numero reale  $x$ . La funzione  $y = a^{\log_a x}$  è invece la composizione della funzione logaritmica in base  $a$  con la funzione esponenziale in base  $a$  e va dai reali positivi nei reali

positivi. Anche in questo caso  $a^{\log_a x} = x$ , ma l'uguaglianza vale solo per gli  $x$  positivi!

**Normy:-** Ok, prof, credo di avere capito.

**Apotema:-** Con queste due ulteriori formule, che non fanno altro che esprimere il fatto che le funzioni esponenziali e logaritmiche in base  $a$  sono reciprocamente inverse, siamo in grado di risolvere il problema del cambio di base. Supponiamo di voler esprimere la funzione esponenziale in base  $B$  in termini della funzione esponenziale in base  $b$ . Per esempio, in diversi linguaggi di programmazione avete solo una funzione esponenziale, quella in base quel numero che abbiamo chiamato la base naturale, e dovete esprimere ogni altra funzione esponenziale mediante quella. Basta osservare che  $B = b^{\log_b B}$  e che quindi  $B^x = (b^{\log_b B})^x = b^{x \log_b B}$ . Abbiamo allora che

$$B^x = b^{x \log_b B}.$$

Si badi bene che questa formula ci consente di esprimere la funzione esponenziale in base  $B$  mediante quella in base  $b$ , ma facendo uso anche della funzione logaritmica in base  $b$ .

**Scetty:-** Ma a cosa ci serve, se tutte le calcolatrici possono calcolare le funzioni esponenziali in base qualsiasi? Non era invece per i logaritmi che serviva una formula per il cambio di base?

**Apotema:-** Come vi ho già detto, diversi linguaggi di programmazione hanno un'unica funzione esponenziale in una base fissata, di solito quella naturale, ma non è certo questo l'unico motivo dell'utilità di questa formula. Vi farò vedere un esempio interessante fra poco.

**Normy:-** E quella per i logaritmi?

**Apotema:-** Eccoci pronti! Posso, ad esempio, scrivere che  $\log_b x = \log_b B^{\log_B x}$ . Usando una proprietà dei logaritmi scrivo allora che  $\log_b x = \log_B x \log_b B$ . Ricavo quindi subito che

$$\log_B x = \frac{\log_b x}{\log_b B}.$$

Proviamo allora a calcolare  $\log_2 7$ ! Se vogliamo usare i logaritmi

in base dieci, possiamo scrivere che  $\log_2 7 = \frac{\log 7}{\log 2}$ .

**Svelty:-** 2.80735492206!

**Apotema:-** Tutti avete ottenuto questo valore?

**Normy:-** Sì, prof!

**Sekky:-** Allora, professore, per calcolare i logaritmi in una certa base, basta calcolarli in base dieci e poi dividere per il logaritmo decimale della base, vero?

**Apotema:-** Proprio così.

**Scopry:-** E il problema interessante? -

**Apotema:-** Se un numero naturale ha 4 cifre nella sua rappresentazione decimale, quante ne ha nella sua rappresentazione binaria?

**Gioky:-** Non mi sembra così difficile! Basta verificare!

**Scetty:-** Ma non è detto che la risposta sia un solo numero! Per esempio, se un numero naturale ha una rappresentazione decimale di una sola cifra, e quindi è un numero da 1 a 9, la sua rappresentazione binaria può avere da una a quattro cifre binarie. Infatti in binario, uno si scrive 1 e nove si scrive 1001!

**Apotema:-** Infatti, io non l'ho detto che la risposta consiste di un solo numero!

**Gioky:-** Pensavo infatti di trasformare in binario i numeri 1000 e 9999, che sono il più piccolo e il più grande numero la cui rappresentazione decimale ha 4 cifre, e vedere quante cifre hanno!

**Apotema:-** E che cosa aspetti a farlo? Anzi, vieni a farlo alla lavagna!

**Gioky:-** Se ben ricordo, devo trovare i resti successivi della divisione per due... Comincio da 1000... 500 col resto di 0, 250 col resto di 0, 125 col resto di 0, 62 col resto di 1...

(E, dopo qualche rapido calcolo...)

**Gioky:-** La rappresentazione binaria di 1000 è "1111101000", che ha 10 cifre, mentre quella di 9999 è "10011100001111", che ha 14 cifre!

**Apotema:-** Allora, quante cifre ha la rappresentazione binaria di un numero naturale la cui rappresentazione decimale ha quattro cifre?

**Gioky:-** Dalle 10 alle 14 cifre!

**Apotema:-** Risposta esatta.

**Normy:-** E cosa c'entrano le formule del cambio di base?

**Apotema:-** Il procedimento di Gioky è corretto ed è certamente il più semplice, ma quando il numero di cifre diventa grande, ecco che richiede troppi calcoli per essere fatto senza l'aiuto di un programma. Vediamo ora un altro procedimento. Cosa posso dire di un numero  $x$  che ha 4 cifre nella rappresentazione decimale? -

**Svelty:-** Che  $x$  è compreso tra 1000 e 9999!

**Apotema:-** E se ti dicessi che ha  $n$  cifre? Qual è il primo numero di  $n$  cifre?

**Fuory:-**  $10^n$  !

**Normy:-** No, è  $10^{n-1}$  ! Il primo numero di 4 cifre è 1000, che è  $10^3$  e non  $10^4$  !

**Apotema:-** Allora cosa posso dire del numero naturale  $x$  che ha  $n$  cifre nella rappresentazione decimale?

**Svelty:-** Possiamo dire che  $10^{n-1} \leq x < 10^n$  !

**Apotema:-** Bene. E quando, invece, un numero  $x$  ha  $m$  cifre in base due?

**Ovvv:-** Quando  $2^{m-1} \leq x < 2^m$  !

**Apotema:-** Ritorniamo al nostro problema. Se il numero naturale  $x$  ha 4 cifre in base 10, quante ne ha in base 2? Possiamo dire che  $10^3 \leq x < 10^4$ . L'idea è quella di esprimere le potenze di 10 come potenze di 2 usando la formula del cambio di base. Abbiamo che  $10^3 = 2^{3 \log_2 10} = \dots$  Chi mi dice quanto fa  $3 \log_2 10$  ? -

**Svelty:-** Viene  $3 \frac{\log 10}{\log 2} = \frac{3}{\log 2}$  che fa... 9.96578

**Apotema:-** Allo stesso modo  $10^4 = 2^{4 \log_2 10}$  e  $4 \log_2 10$  fa?

**Svelty:-** Allora...  $\frac{4}{\log 2}$  ... Viene 13.28771!

**Apotema:-** Possiamo allora dire che se  $10^3 \leq x < 10^4$ , allora  $2^{\frac{3}{\log 2}} \leq x < 2^{\frac{4}{\log 2}}$ , che diventa  $2^{9.96\dots} \leq x < 2^{13.28\dots}$ . La disuguaglianza più stretta con esponenti interi è allora la seguente

$$2^9 \leq x < 2^{14}.$$

Ma  $2^9$  è il primo numero di 10 cifre binarie, mentre  $2^{14}$  è il primo numero di 15 cifre binarie. Dalla disuguaglianza segue che  $x$  ha dalle 10 alle 14 cifre binarie!

**Scetty:-** Ma  $x$  non può essere uguale a  $2^9$ !

**Apotema:-** Vero, ma può essere minore di  $2^{10}$ , che è il primo numero di 11 cifre binarie. E quindi può certamente avere 10 cifre binarie.

**Normy:-** E perché non può averne 15?

**Apotema:-** Perché  $x$  è minore di  $2^{14}$ , che è il primo numero di 15 cifre binarie.

**Normy:-** Ho capito, ma mi è sembrato più difficile di prima!

**Apotema:-** Vediamo subito il vantaggio di questo procedimento. Se  $x$  ha  $n$  cifre decimali, qual è il numero  $m$  di cifre binarie? Chi viene alla lavagna?

**Geny:-** Scrivo la disuguaglianza con le potenze di dieci e poi passo alla base due!

**Apotema:-** Dai, Geny, vieni a farcelo vedere!

**Geny:-** Possiamo dire che  $10^{n-1} \leq x < 10^n$  e non ci resta che

passare alla base 2. Abbiamo che  $10^n = 2^{n \log_2 10} = 2^{\frac{n \log 10}{\log 2}} = 2^{\frac{n}{\log 2}}$ .

Analogamente,  $10^{n-1} = 2^{\frac{n-1}{\log 2}}$  e arriviamo così alla stima

$$2^{\frac{n-1}{\log 2}} \leq x < 2^{\frac{n}{\log 2}}.$$

Adesso di tratta di fare la stima più stringente con gli esponenti interi. Prendo la parte intera inferiore di  $\frac{n-1}{\log 2}$  e la parte intera

superiore di  $\frac{n}{\log 2}$ . In questo modo posso dire che

$$2^{\left\lfloor \frac{n-1}{\log 2} \right\rfloor} \leq x < 2^{\left\lceil \frac{n}{\log 2} \right\rceil}.$$

**Apotema:-** E... qual è la risposta?

**Geny:-** Il numero  $x$  ha dalle  $\left\lfloor \frac{n-1}{\log 2} \right\rfloor + 1$  alle  $\left\lceil \frac{n}{\log 2} \right\rceil$  cifre! Quindi posso dire che

$$\left\lfloor \frac{n-1}{\log 2} \right\rfloor + 1 \leq m \leq \left\lceil \frac{n}{\log 2} \right\rceil.$$

**Apotema:-** Bel colpo, Geny! Verifichiamo la soluzione di prima.

**Geny:-**  $\left\lfloor \frac{n-1}{\log 2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{3}{\log 2} \right\rfloor + 1 = \lfloor 9.96 \rfloor + 1 = 9 + 1 = 10$  , mentre

$\left\lceil \frac{n}{\log 2} \right\rceil = \left\lceil \frac{4}{\log 2} \right\rceil = \lceil 13.28 \rceil = 14$  e quindi un numero naturale di 4

cifre decimali ha dalle 10 alle 14 cifre binarie!

**Fuory:-** La formula si può semplificare!

**Apotema:-** Come?

**Fuory:-** A sinistra, prima faccio la parte intera inferiore e poi sommo uno. Tanto vale fare subito la parte intera superiore!

**Apotema:-** Cosa ne dici, Geny?

**Geny:-** Funziona quando il numero non è intero, ma quando è intero sbaglia!

**Fuory:-** Ti pareva...

**Apotema:-** Bravissimo! Ma adesso supera te stesso e ricava una formula più generale. Se un numero naturale  $x$  ha  $n$  cifre in base  $b$ , allora qual è il numero  $m$  di cifre che ha in base  $B$ ?

**Geny:-** Se  $x$  ha  $n$  cifre in base  $b$  allora  $b^{n-1} \leq x < b^n$ . Passo alla base  $B$  e ottengo che  $b^n = B^{n \log_B b}$ , mentre  $b^{n-1} = B^{(n-1) \log_B b}$ . Allora posso scrivere che  $B^{(n-1) \log_B b} \leq x < B^{n \log_B b}$ . Il numero  $m$  di cifre di  $x$  in base  $B$  soddisfa allora la disuguaglianza

$$\lfloor (n-1) \log_B b \rfloor + 1 \leq m \leq \lceil n \log_B b \rceil.$$

**Apotema:-** Benissimo, Geny! Ma vediamo almeno qualche esempio. Cominciamo col verificare una regola che tutti conoscete bene dal corso di informatica per convertire da esadecimale a binario. Sapete tutti, infatti, che in questo caso basta convertire separatamente in binario ogni cifra esadecimale. Per esempio, Geny, come converti in binario il numero esadecimale 2FA3? -

**Geny:-** 2 diventa 10, F diventa 1111, A diventa 1010 e 3 diventa 0011 e quindi 2FA3 convertito in binario è 10111110100011. -

**Apotema:-** E quindi se un numero ha  $n$  cifre esadecimali, quante cifre binarie ha?

**Geny:-** La prima cifra esadecimale si converte da una a 4 cifre

binarie, mentre tutte le altre in 4 cifre binarie. Quindi un numero che ha  $n$  cifre esadecimali ha da  $4(n-1)+1=4n-3$  a  $4n$  cifre binarie!

**Apotema:-** Verifichiamolo con la formula che hai trovato!

**Geny:-** In questo caso  $\lfloor (n-1)\log_b b \rfloor + 1 = \lfloor (n-1)\log_2 16 \rfloor + 1$ , ma  $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$  e, siccome la parte intera inferiore di un numero intero è il numero stesso:

$$\lfloor (n-1)\log_2 16 \rfloor + 1 = \lfloor 4(n-1) \rfloor + 1 = 4(n-1) + 1.$$

Allo stesso modo  $\lceil n\log_b b \rceil = \lceil 4n \rceil = 4n$ .

**Apotema:-** Benissimo! Ancora una domanda. Secondo te, Geny, è possibile che il risultato del problema sia un numero solo?

**Geny:-** Certamente! Quando passo da una base a una più grande! Avevamo visto che un numero che ha 4 cifre decimali ha dalle 10 alle 14 cifre binarie. Mi aspetto che un numero di 14 cifre binarie abbia dalle 4 alle 5 cifre decimali e che un numero di 13 cifre binarie, ma anche di 11 o 12, abbia invece esattamente 4 cifre decimali! Mentre uno di 10 cifre binarie abbia dalle 3 alle 4 cifre decimali!

**Apotema:-** Non ci resta che verificarlo!

**Geny:-** Consideriamo il caso di un numero che ha 13 cifre binarie. Abbiamo che  $\lfloor (n-1)\log_b b \rfloor + 1 = \lfloor 12\log 2 \rfloor + 1 = \dots$  Svelty, calcolami  $12\log 2$ !

**Svelty:-** 3.6!

**Geny:-** Il numero minimo di cifre è allora  $\lfloor 3.6 \rfloor + 1 = 3 + 1 = 4$ , mentre il numero massimo di cifre è  $\lceil 13\log 2 \rceil = \dots$  Dai, Svelty!

**Svelty:-** 3.9!

**Geny:-** Il numero massimo di cifre è  $\lceil 3.9 \rceil = 4$  e quindi ha sempre 4 cifre!

**Apotema:-** Ottimo! Vediamo di concludere la lezione ricavando, anche per le funzioni logaritmiche, l'espressione della funzione che manda una data progressione in un'altra. In questo caso si tratta di trovare l'espressione della funzione logaritmica che manda la progressione geometrica

$$\dots, cq^{-2}, cq^{-1}, c, cq, cq^2, \dots$$

nella progressione aritmetica

$$\dots, C - 2D, C - D, C, C + D, C + 2D, \dots$$

Direi che ormai questo privilegio spetta di diritto a Furby! Su, Furby, dicci quali funzioni componi per ottenere la nostra funzione logaritmica!

**Furby:-** Dunque... Prima divido per  $c$ ... e ottengo la progressione

$$\dots, q^{-2}, q^{-1}, 1, q, q^2, \dots$$

Poi applico la funzione logaritmica in base  $q$  e ottengo la progressione degli interi

$$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Adesso moltiplico per  $D$

$$\dots, -2D, -D, 0, D, 2D, \dots$$

E infine sommo  $C$

$$\dots, C - 2D, C - D, C, C + D, C + 2D, \dots$$

**Apotema:-** Dunque la funzione logaritmica cercata è la composizione delle funzioni " $/c$ ", " $\log_q$ ", " $\times D$ " e " $+C$ " e quindi la funzione

$$f(x) = D \log_q \frac{x}{C} + C.$$

Ancora una volta, otteniamo facilmente l'espressione della funzione logaritmica  $f$  con  $f(x_1) = y_1$  e  $f(x_2) = y_2$ , ma questo lo fate voi a casa. Vediamo invece qual è la forma della più generale funzione logaritmica. Se  $f$  è una qualsiasi funzione logaritmica, poniamo  $a = f(1)$ . Poiché sottraendo uno stesso numero ai termini di una progressione aritmetica si ottiene ancora una progressione aritmetica, la funzione  $g(x) = f(x) - a$  è ancora una funzione logaritmica. Essendo  $g(1) = f(1) - a = 0$ , si tratta di una funzione logaritmica pura e quindi  $g(x) = \log_b x$ . Ne segue che  $f(x) - a = \log_b x$ , da cui  $f(x) = a + \log_b x$ . Abbiamo così ottenuto il risultato che una generica funzione logaritmica è la somma di una costante con una funzione logaritmica pura.

**Normy:-** E come sono fatti i grafici?

**Apotema:-** Lascio a voi di capire come sono fatti i grafici delle funzioni logaritmiche in base  $b$  e delle funzioni logaritmiche in

generale.

**Bronty:-** Mi sembrava troppo poco!

**Apotema:-** E non ho finito! Trovatevi cosa succede se componiamo una funzione logaritmica con una lineare, una esponenziale con una logaritmica e una logaritmica con una esponenziale!

**Normy:-** Ma non l'abbiamo già visto che se componiamo una funzione esponenziale con una logaritmica o, viceversa, una logaritmica con una esponenziale si ottiene sempre l'identità?

**Apotema:-** Quando si trattava di funzioni pure e con la stessa base! Ve lo chiedo nel caso generale!

**Sekky:-** Scusi, professore. E quella sua affermazione che i nostri organi di senso realizzano una funzione logaritmica?

**Apotema:-** Grazie di avermelo ricordato, Sekky! Vi lascio come compito facoltativo di cercare informazioni sulla legge psicofisica di Fechner e Weber!

**Asy:-** Legge psico cosa?

**Apotema:-** Psicofisica! Di Fechner e Weber! Ve lo scrivo alla lavagna. Ci vediamo la prossima settimana!

**Bronty:-** E ce la metterò nel compito?

**Apotema:-** Solo nel tuo, Bronty!

**Asy:-** Mi chiedo come facciano i miei organi di senso a calcolare i logaritmi se non li so calcolare neanche io!

**Rozzy:-** Parlava degli organi di senso, non del cervello!

**Gioky:-** E poi non puoi calcolarli in nessuna base, perché ti mancano le basi!

**Asy:-** È facoltativo ridere?



## LEZIONE IX

**Apotema:-** Vieni tu, Ovvv, a correggere i compiti?

**Ovvv:-** Non sono certo di aver fatto tutto bene...

**Apotema:-** Vediamo!

**Ovvv:-** Il primo problema era semplice! Dovevamo trovare l'espressione della funzione logaritmica con  $f(x_1)=y_1$  e  $f(x_2)=y_2$ . Avevamo già trovato la forma della funzione logaritmica che manda la progressione geometrica

$$\dots, cq^{-2}, cq^{-1}, c, cq, cq^2, \dots$$

nella progressione aritmetica

$$\dots, C - 2D, C - D, C, C + D, C + 2D, \dots$$

e avevamo visto che veniva

$$f(x) = D \log_q \frac{x}{c} + C.$$

A questo punto bastava considerare come progressione in ingresso la progressione geometrica  $x_1, x_2$ , di ragione  $\frac{x_2}{x_1}$ , e

come progressione in uscita la progressione aritmetica  $y_1, y_2$ , di ragione  $y_2 - y_1$ . In questo caso possiamo sostituire  $c = x_1$ ,

$q = \frac{x_2}{x_1}$ ,  $C = y_1$  e  $D = y_2 - y_1$  e arriviamo all'espressione

$$f(x) = (y_2 - y_1) \log_{\frac{x_2}{x_1}} \frac{x}{x_1} + y_1.$$

**Apotema:-** Molto bene, Ovvv! Dunque, come già avevamo visto per le funzioni lineari ed esponenziali, anche le funzioni logaritmiche sono completamente definite dai valori che assumono su una coppia di numeri. Passiamo al prossimo problema.

**Ovvv:-** Dovevamo dedurre la forma dei grafici delle funzioni logaritmiche pure e poi delle funzioni logaritmiche in generale

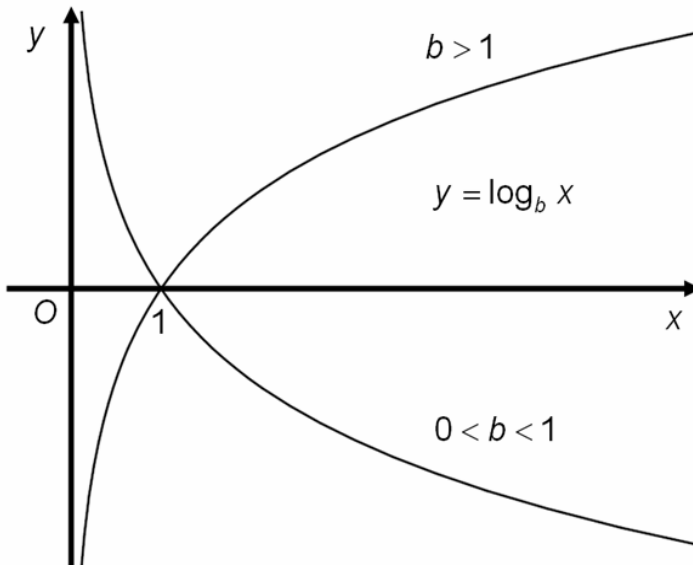
**Apotema:-** E come hai proceduto?

**Ovvy:-** Per le funzioni logaritmiche pure ho usato il fatto che  $y = \log_b x$  è l'inversa di  $y = b^x$  e che il grafico dell'inversa si ottiene da quello della funzione mediante una simmetria rispetto alla retta  $y = x$ .

**Apotema:-** Era certamente la strada più semplice. Disegna allora i grafici di due funzioni logaritmiche, una con base maggiore di uno e una con base minore di uno.

(Ovvy disegna i grafici con una certa cura)

**Ovvy:-** I grafici sono nel semipiano destro e passano tutti per il punto  $(1,0)$  ... sono crescenti con la concavità rivolta verso il basso se la base è maggiore di uno... e decrescenti con la concavità rivolta verso l'alto se la base è minore di uno... si avvicinano sempre più all'asse  $y$  quando la  $x$  si avvicina a zero... circa così... li ho anche disegnati col Derive...



**Apotema:-** E nel caso generale?

**Ovvy:-** Basta sommare una costante... e quindi...

**Apotema:-** E quindi?

**Ovvy:-** E quindi i grafici si ottengono da quelli di una funzione

logaritmica pura traslando verso l'alto o verso il basso a seconda che la costante sia positiva o negativa.

**Apotema:-** In particolare, la costante è proprio il valore in  $x = 1$ .

**Apotema:-** Tutti d'accordo con Ovvv?

**Normy:-** C'erano anche da fare delle composizioni!

**Apotema:-** Hai fatto anche quelle, Ovvv?

**Ovvv:-** Sì, ma mi sono sembrate troppo semplici. Forse ho sbagliato qualcosa...

**Apotema:-** Dopo aver visto gli altri tipi di composizioni dovrebbero essere state semplici per tutti!

**Ovvv:-** La prima domanda riguardava la composizione di una funzione logaritmica con una funzione lineare.

**Apotema:-** E qual è la tua risposta? -

**Ovvv:-** Che si tratta ancora di una funzione logaritmica!

**Apotema:-** Esatto. E come hai motivato la risposta?

**Ovvv:-** Prima di tutto le due funzioni si possono comporre perché la funzione logaritmica va dai reali positivi nei reali e quella lineare va dai reali nei reali. La composizione va allora dai reali positivi nei reali. Abbiamo visto una volta per tutte che la composizione di due funzioni monotone è ancora una funzione monotona. Resta da vedere come si comporta la composizione riguardo alle progressioni. Siccome una funzione logaritmica manda progressioni geometriche in aritmetiche e una funzione lineare manda progressioni aritmetiche in aritmetiche, allora la loro composizione manda progressioni geometriche in aritmetiche. Possiamo allora concludere che la composizione di una funzione logaritmica con una funzione lineare è una funzione logaritmica.

**Apotema:-** E sapresti mostrarlo usando l'espressione di queste funzioni?

**Ovvv:-** Penso di sì. Una funzione logaritmica ha la forma  $f(x) = a + \log_b x$ , mentre una funzione lineare ha la forma  $g(x) = A + Bx$ . La loro composizione diventa

$$g(f(x)) = A + Bf(x) = A + B(a + \log_b x) = A + aB + B\log_b x.$$

**Apotema:-** E allora?

**Ovvv:-** Osservo che  $A + aB$  è una costante...

**Apotema:-** E cosa mi dici di  $B\log_b x$ ?

**Ovvv:-** In effetti... non sembra essere una funzione logaritmica

pura...

**Apotema:-** Hai fatto bene a dire che non sembra... Perché invece lo è!

**Geny:-** Siccome le funzioni logaritmiche assumono tutti i possibili valori reali posso sempre esprimere  $B$  come il logaritmo in base  $b$  di un numero. Un momento... Ah, no! Mi conviene esprimere  $1/B$  come il logaritmo in base  $b$  di un numero!

Chiamo  $c$  quell'unico numero per cui  $\frac{1}{B} = \log_b c$ . A questo punto

abbiamo che  $B \log_b x = \frac{\log_b x}{\log_b c} = \log_c x$  per la formula del

cambiamento di base!

**Apotema:-** Ce l'abbiamo fatta!

**Ovvy:-** Per finire, dovevamo dire quale tipo di funzione era la composizione di una funzione esponenziale con una logaritmica e, viceversa, la composizione di una funzione logaritmica con una esponenziale. Nel primo caso si ottiene una funzione lineare, perché la composizione va dai reali nei reali e manda progressioni aritmetiche in aritmetiche, mentre nel secondo caso si ottiene una funzione dai reali positivi nei reali positivi che manda progressioni geometriche in geometriche e quindi una funzione potenza!

**Normy:-** Ma... come mai una funzione potenza? Non doveva venire l'identità, che è una funzione lineare?

**Apotema:-** L'identità è una funzione lineare quando è definita su tutti i numeri reali. In questo caso è una funzione potenza con esponente 1 e, come tutte le altre potenze a esponente reale qualsiasi, è definita solo per i reali positivi. In ogni caso il risultato è l'identità sui reali positivi solo nel caso in cui sia la funzione logaritmica che quella esponenziale siano pure e con la stessa base. Ma proviamo a verificarlo usando l'espressione generale delle funzioni esponenziali e logaritmiche.

**Ovvy:-** Comincio con la composizione di una funzione esponenziale con una logaritmica. In questo caso  $f(x) = ab^x$  e  $g(x) = A + \log_b x$  e quindi  $g(f(x)) = A + \log_b f(x) = A + \log_b ab^x$ . A questo punto uso le proprietà dei logaritmi e ricavo che

$$A + \log_b ab^x = A + \log_b a + x \log_b b = C + Dx,$$

dove  $C = A + \log_B a$  e  $D = \log_B b$ . Si tratta di una funzione lineare!

**Apotema:-** E quando le componi nell'ordine inverso?

**Ovvy:-** Questa volta calcolo  $f(g(x)) = ab^{A+\log_B x}$ . Uso le proprietà delle funzioni esponenziali e trovo che:

$$ab^{A+\log_B x} = ab^A b^{\log_B x}.$$

**Apotema:-** E adesso?

**Ovvy:-** ... e adesso...

**Geny:-** Cambio base nel logaritmo! Passo da base  $B$  a base  $b$ !

Posso scrivere che  $\log_B x = \frac{\log_b x}{\log_b B} \dots$

**Apotema:-** Vieni alla lavagna!

**Geny:-** Posso scrivere che  $b^{\log_B x} = b^{\frac{\log_b x}{\log_b B}} = (b^{\log_b x})^{\frac{1}{\log_b B}} = x^{\frac{1}{\log_b B}}$  e

quindi  $f(g(x)) = ab^A x^{\frac{1}{\log_b B}}$ . Nel caso in cui sia  $a = 1$  e  $A = 0$  e sia anche  $b = B$ , cioè nel caso di funzioni pure con la stessa

base  $b$ , abbiamo che  $f(g(x)) = 1 \cdot b^0 x^{\frac{1}{\log_b b}} = x$ !

**Apotema:-** E così abbiamo intravvisto che si tratta di una funzione potenza, anche se le funzioni potenze non le abbiamo ancora studiate in dettaglio.

**Ovvy:-** Questo non era ovvio...

**Sekky:-** Professore, io mi sono documentato sulla legge psicofisica di Fechner e Weber, ma in molti casi l'enunciato era incomprensibile. Per fortuna ho trovato qualche enunciato più semplice!

**Apotema:-** Allora prova a riferircelo!

**Sekky:-** Questo enunciato l'ho trovato su Wikipedia, ma non alla voce "legge psicofisica di Fechner e Weber", dove tutto era per me incomprensibile, ma alla voce "Fechner":

*« Perché l'intensità di una sensazione cresca in progressione aritmetica, lo stimolo deve accrescersi in progressione geometrica »*

*In formula,*

$$S = c \log R,$$

dove  $S$  è il valore della sensazione,  $R$  quello dello stimolo, e  $c$

*una costante che varia da stimolo a stimolo. Pertanto la sensazione  $S$  si accresce con il logaritmo dell'intensità dello stimolo.*

**Normy:-** Ma cosa si intende per sensazione e per stimolo?

**Apotema:-** I nostri organi di senso sono soggetti a degli stimoli fisici e rispondono dando origine a delle sensazioni. Per esempio, un'onda di pressione nell'aria è lo stimolo che ci fornisce una sensazione uditiva e un aumento di temperatura una sensazione di calore. La legge psicofisica di Fechner e Weber afferma che la sensazione cresce in progressione aritmetica se lo stimolo cresce in progressione geometrica. In altre parole, come tutti ben sapete, la funzione che associa allo stimolo la sensazione è una funzione logaritmica.

**Dubby:-** Mi sfugge il senso della cosa...

**Apotema:-** Immaginate di avere diverse lampadine, tutte alla stessa distanza da voi. Supponete che la prima lampadina abbia una luminosità di 10 candele e la seconda di 20 candele. Bene, per avere la sensazione che ogni lampadina abbia la stessa differenza di luminosità rispetto alla precedente, la terza lampadina non deve avere una luminosità di 30 candele, ma di 40! La quarta di 80 candele e la quinta di 160! Lo stimolo, che è l'energia luminosa effettivamente irradiata dalle lampade, deve crescere in progressione geometrica affinché la sensazione luminosa cresca in progressione aritmetica!

**Normy:-** Davvero?

**Apotema:-** Pare proprio di sì, con buona precisione. Un altro esempio. Voi tutti conoscete la scala musicale detta cromatica, con i suoi 12 semitoni. Bene, la chiamiamo scala proprio perché la nostra sensazione è quella di tanti salti tutti uguali. In altre parole, la sensazione uditiva è che i suoni crescano in progressione aritmetica. Sapete anche che l'altezza di un suono è data dalla frequenza della vibrazione. Eppure le frequenze delle note della scala cromatica non crescono in progressione aritmetica, ma in progressione geometrica! In particolare le frequenze raddoppiano ogni ottava. Se il LA centrale del pianoforte ha una frequenza di  $440\text{ Hz}$ , allora il LA dell'ottava successiva ha una frequenza di  $880\text{ Hz}$  e quello dell'ottava precedente ha una frequenza di  $220\text{ Hz}$ . Nella scala musicale che siamo soliti usare, la cosiddetta scala temperata, le

frequenze delle note sono rigorosamente in progressione geometrica. Siccome la ragione  $q$  è tale che la frequenza raddoppia ogni 12 semitoni, abbiamo che  $q^{12} = 2$  e quindi  $q = \sqrt[12]{2}$ .

**Svelty:-** 1.059463094!

**Apotema:-** Allora dimmi, Svelty, partendo dal LA centrale del pianoforte, qual è la frequenza del DO successivo.

**Svelty:-** LA#, SI, DO. Tre semitoni! E quindi devo moltiplicare tre volte per  $\sqrt[12]{2}$ , cioè per  $(\sqrt[12]{2})^3$ , che fa  $\sqrt[4]{2^3}$  e cioè  $\sqrt[4]{2}$ . La frequenza del DO è allora  $440 \cdot \sqrt[4]{2}$ , che fa... 523 Hz!

**Scetty:-** Mi scusi, prof! Capisco che cosa significa dire che lo stimolo cresce in progressione geometrica, perché si tratta di una grandezza fisica misurabile. Ma che cosa significa dire che la sensazione cresce in progressione aritmetica, e cioè di salti uguali? Come si fa a misurare la sensazione? Non si tratta di qualcosa di completamente soggettivo? -

**Apotema:-** La domanda è molto profonda. Cercherò di darti una risposta. Le prime esperienze fatte da Weber riguardavano la sensazione muscolare. Aveva sperimentato che uno stesso aumento di peso, relativamente a un peso molto maggiore, diventava molto difficile da percepire. Per esempio, l'aumento di un ettogrammo viene percepito molto facilmente su un peso di un chilogrammo, ma molto più difficilmente su un peso di 10 chilogrammi.

**Scetty:-** Questo lo posso capire, ma come si fa a passare a delle misure che stabiliscano che la sensazione varia in progressione aritmetica?

**Apotema:-** Infatti la tua domanda è molto azzeccata e mette a nudo il fatto che non vi ho detto che cosa si intenda per sensazione che cresce in progressione aritmetica!

**Scetty:-** E che cosa si intende? Non riesco a capire come si possa definire questo concetto a partire da qualcosa di così soggettivo come la sensazione!

**Apotema:-** Riprendiamo l'esempio dei pesi. Supponiamo di avere preparato tanti cilindretti esteriormente identici, ma di peso diverso. Immaginate che i pesi dei cilindretti partano da 100g e crescano di 1g alla volta. Il peso rappresenta lo stimolo.

Sollevandolo col braccio proviamo una certa sensazione muscolare. Io, che sono lo sperimentatore, prendo il cilindretto da 100g e quello da 101g, esteriormente assolutamente identici, e vi propongo di sollevarli uno alla volta, prima uno e poi l'altro, con lo stesso braccio, e chiedo a ciascuno di voi qual è il più pesante. Ci sono tre possibili risposte per ciascuno di voi: 1) non so distinguere la differenza; 2) è più pesante il primo; 3) è più pesante il secondo. Se la percentuale di quelli che indovinano è bassa, significa che la differenza è troppo lieve per essere percepibile. Se invece il 95% di voi riconosce il cilindretto che è realmente più pesante, allora significa che la differenza è riconoscibile. Magari accade che solo la differenza da 100 a 105 grammi venga percepita oltre ogni dubbio da voi, mentre fino a 104 grammi regna l'incertezza. Allora proseguo e vi faccio confrontare il cilindretto che io solo so pesare 105g con cilindretti di peso crescente. Magari succede che il primo ad essere distinto da almeno il 95% di voi è quello di 112g. Ormai dovrebbe essere chiaro come proseguire. Affermo, per definizione, che la successione di pesi produce sensazioni in progressione aritmetica, nel senso che la sensazione varia col passo più breve possibile per poter essere percepibile senza ambiguità. Quello che osservo sperimentalmente è che la successione dei pesi che corrispondono a quella successione di sensazioni è, con buona approssimazione, una progressione geometrica.

**Scetty:-** Adesso direi proprio di avere capito!

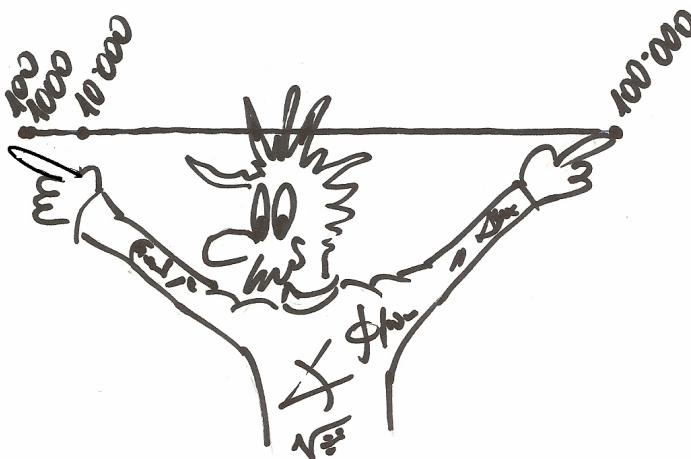
**Dubby:-** Ma perché le cose stanno così? Mi sembra inutilmente complicato!

**Apotema:-** Di solito in natura non c'è posto per cose inutilmente complicate. Se le cose stanno così è perché è vantaggioso che siano così.

**Normy:-** E quale sarebbe il vantaggio? Non sarebbe stato meglio che gli organi di senso fossero stati lineari invece che logaritmici?

**Apotema:-** Evidentemente no. Vediamo di entrare più nel dettaglio della questione. Supponiamo di avere un foglio bianco con su scritto un testo in rosso. Supponiamo poi, per semplicità, che il bianco rifletta il 100% della luce, mentre il rosso soltanto il 10%. I nostri occhi funzionano in un intervallo incredibilmente

ampio di condizioni di luce. Tra la luminosità di un campo innevato in una giornata di sole e quella della vostra camera da letto in penombra quando vi alzate la notte c'è un rapporto 200'000 a 1! Supponiamo, sempre per semplificare, che l'occhio umano riesca a vedere in un intervallo di luminosità da 1 a 100'000, rispetto a una qualche unità di misura, ok? Con luminosità 100'000 il nostro foglio ha lo sfondo bianco che riflette il 100% della luce e quindi lo vediamo luminoso 100'000, mentre il rosso, che riflette il 10% della luce, lo vediamo luminoso 10'000. Con luminosità 10'000 il bianco lo vediamo luminoso 10'000 e il rosso 1'000. Con luminosità 1'000 il bianco lo vediamo luminoso 1'000 e il rosso 100, ecc. Con luminosità 10 il bianco lo vediamo luminoso 10 e il rosso 1.



(Apotema disegna un segmento alla lavagna)

**Apotema:-** Se la relazione stimolo-sensazione fosse lineare, in una scala da 1 a 100'000 noi distingueremmo certamente il 100'000 dal 10'000 e il 10'000 dal 1'000, ma faremmo già moltissima fatica a distinguere il 1'000 dal 100 e non riusciremmo di certo a distinguere il 100 dal 10 e, tantomeno, il 10 dall'uno! La relazione stimolo-sensazione è invece logaritmica e questo fa sì che le cose vadano molto meglio! Per semplicità supponiamo che si tratti della funzione logaritmica in base dieci. La luminosità 10'000 viene percepita come luminosità 5, quella 10'000 viene percepita come 4, quella

1'000 come 3 e così via, fino alla luminosità 1, che viene percepita come 0. Ecco allora che in una scala da 0 a 6 le cose vanno assai diversamente per il nostro foglio bianco scritto in rosso! Con luminosità 100'000 il bianco viene percepito luminoso 6 e il rosso 5. Con luminosità 10'000 il bianco viene percepito luminoso 5 e il rosso 4, e così via, fino al caso di luminosità 10 in cui il bianco viene percepito luminoso 1 e il rosso 0!

**Dubby:-** Ho capito! Il foglio risulta leggibile sia con molta luce che con poca luce, nel senso che la differenza di luminosità tra il bianco e il rosso resta la stessa indipendentemente dal livello di luminosità! Mentre se la relazione fosse lineare riusciremmo a leggere il foglio con molta luce, ma non con poca!

**Apotema:-** Questo il vantaggio!

**Scopry:-** E che applicazione si può fare di questa legge?

**Apotema:-** Intanto occorre conoscerla ogni volta che si realizza un dispositivo che deve interagire con i nostri organi di senso. Se il dispositivo di regolazione dell'audio del vostro televisore facesse crescere linearmente l'intensità del suono ecco che voi sentireste subito un lieve aumento ma poi vi sembrerebbe di non aumentare più quasi di niente!

**Normy:-** E perché?

**Apotema:-** Pensa alle lampadine. Se le prendi con 10, 20, 30, 40... candele ecco che dalla prima alla seconda percepisci un sensibile salto di luminosità, dalla seconda alla terza molto meno, dalla terza alla quarta quasi niente! Avresti dovuto prenderle di 10, 20, 40, 80... candele!

**Normy:-** Quindi in realtà quando il cursore dell'audio si sposta di tratti uguali l'intensità del suono cresce in progressione geometrica!

**Apotema:-** Esatto.

**Normy:-** Stessa cosa per la luminosità?

**Apotema:-** Stessa cosa.

**Normy:-** Incredibile, prof!

**Sekky:-** Professore, può farci qualche esempio in cui si usano le funzioni logaritmiche per tenere conto della legge di Fechner e Weber?

**Apotema:-** Un esempio notevole è quello delle magnitudini apparenti delle stelle. Se guardiamo il cielo stellato a occhio nudo vediamo forse una decina di stelle decisamente più

luminose delle altre, alcune centinaia di stelle di media luminosità e alcune migliaia di stelle di debole luminosità. Gli astronomi dell'antichità, seguendo l'illusione data dai sensi, credevano che le stelle fossero situate tutte alla stessa distanza da noi, sulla superficie interna di una enorme sfera. Spiegavano il fatto che ci fossero poche stelle luminose e molte stelle di debole luminosità con una analogia col genere umano. Ci sono pochi uomini di grande valore e una moltitudine di uomini mediocri! Oggi noi diamo una spiegazione molto più semplice di questo fatto. La luminosità di una stella, così come ci appare osservata dalla terra, detta appunto luminosità apparente, dipende sostanzialmente da due fattori: dalla sua luminosità intrinseca, cioè da quanta luce emette, e dalla sua distanza. Il fattore predominante è però di gran lunga la distanza. Ecco allora che, essendoci molto più spazio lontano che vicino, diventa ovvio il fatto che le stelle poco luminose siano molto più numerose di quelle luminose. Nel II secolo a.C. l'astronomo Ipparco compilò il primo catalogo stellare di cui abbiamo notizia. In quel catalogo comparivano poco più di mille stelle, suddivise in sei classi di grandezze: di prima grandezza le più luminose e di sesta grandezza le meno luminose. Questo modo di classificare la luminosità delle stelle è rimasto in vigore per secoli. Solo nella metà dell'800, grazie alla fotometria, si poté definire una scala più rigorosa per la luminosità apparente delle stelle. Ci si accorse che le stelle di prima grandezza erano circa 100 volte più luminose delle stelle di sesta grandezza e si decise di porre esattamente uguale a 100 questo rapporto. Si decise poi anche di non discostarsi dall'antica classificazione di Ipparco e di continuare a usare un numero crescente per la grandezza per indicare una luminosità apparente decrescente delle stelle. Si usò poi il termine magnitudine, che ha lo stesso significato di grandezza. Seguendo la legge di Fechner e Weber si decise poi di usare una funzione logaritmica per ottenere la magnitudine a partire dalla luminosità apparente. In questo modo oggi le stelle possono avere una magnitudine apparente non intera e, addirittura, magnitudini molto grandi per le stelle debolissime e visibili solo al telescopio e magnitudine 0 o addirittura negativa per gli oggetti luminosi come il sole o la luna.

**Normy:-** Quindi magnitudine 0 non significa luminosità nulla!

**Apotema:-** Assolutamente no! L'uso di numeri sempre più grandi per luminosità sempre minori proviene dalle classi di Ipparco che stabilivano una graduatoria tra le stelle. Le prime, le seconde, ecc. Se qualcuno viene ancora prima del primo potremmo dire che è arrivato "zeresimo"! E uno prima ancora, "menounesimo"! Ma adesso vediamo di ricavare la funzione logaritmica che lega la magnitudine alla luminosità apparente. Prendendo come definizione di magnitudine il fatto che le stelle di magnitudine 1 sono 100 volte più luminose di quelle di magnitudine 6, abbiamo che la funzione che associa alla luminosità apparente la magnitudine, manda la progressione geometrica

$$\dots 10^{-2}, 1, 10^2, 10^4, \dots$$

nella progressione aritmetica

$$\dots 11, 6, 1, -4, \dots$$

In altre parole, una stella di magnitudine  $-4$  è 100 volte più luminosa di una stella di magnitudine 1 e una stella di magnitudine 11 è 100 volte meno luminosa di una stella di magnitudine 6.

**Scopry:-** Ma allora il sole che magnitudine ha?

**Apotema:-** Lo lascio calcolare a voi! Per cominciare, trovate l'espressione della funzione logaritmica. Poi usate il fatto che il Sole ha una luminosità apparente che è 54 miliardi e mezzo di volte la luminosità apparente di Vega, che è la stella che definisce la magnitudine zero.

**Normy:-** Ma Vega era di prima grandezza per Ipparco! Ci ha detto che non usava stelle di una grandezza che precede la prima!

**Apotema:-** Verissimo, ma le stelle che fino alla metà dell'800 erano considerate di prima grandezza si sono rivelate avere una luminosità molto diversa. In media, come vi ho già detto, circa 100 volte superiore a quella delle stelle di sesta grandezza, ma solo in media. La scala delle magnitudini apparenti è definita in modo che Vega abbia magnitudine zero. Ma ormai suona... Allora, calcolate la magnitudine apparente del Sole. Alla prossima!

## LEZIONE X

**Apotema:-** Dovevate trovare la relazione tra la magnitudine apparente e la luminosità apparente, vero?

**Sekky:-** Sì, professore. E anche la magnitudine apparente del sole.

**Apotema:-** Vieni tu, Sekky, alla lavagna?

**Sekky:-** Va bene, professore.

**Apotema:-** Ricordaci il problema, Sekky.

**Sekky:-** Abbiamo definito la magnitudine apparente di un astro mediante la legge psicofisica di Fechner e Weber, in modo che quando la luminosità cresce in progressione geometrica di ragione 100, la magnitudine decresce con ragione  $-5$ . In particolare, se assegniamo magnitudine 6 a luminosità 1 allora alla luminosità 100 corrisponde magnitudine 1. Si tratta di determinare la funzione logaritmica  $f$  con  $f(1)=6$  e  $f(100)=1$ . Ho usato la formula

$$y = (y_2 - y_1) \log_{\frac{x_2}{x_1}} \frac{x}{x_1} + y_1.$$

**Normy:-** Io ho usato quella che fa uso delle ragioni delle progressioni e di due termini di riferimento!

**Apotema:-** Spero sia chiaro che si tratta della stessa formula! Piuttosto, Sekky, invece delle lettere neutre  $x$  e  $y$ , indica le magnitudini con  $m$  e le luminosità con  $L$ . -

**Sekky:-** Subito, professore. La formula diventa allora

$$m = (m_2 - m_1) \log_{\frac{L_2}{L_1}} \frac{L}{L_1} + m_1,$$

dove  $L_1 = 1$ ,  $L_2 = 100$ ,  $m_1 = 6$  e  $m_2 = 1$ . Posso allora scrivere

che  $m = -5 \log_{100} L + 6 = -5 \frac{\log L}{\log 100} + 6 = -\frac{5}{2} \log L + 6$ . La formula

cercata è allora

$$m = -\frac{5}{2} \log L + 6.$$

**Apotema:-** Giusto!

**Sekky:-** Ci aveva detto che Vega ha magnitudine apparente zero e che il sole ha una luminosità apparente 54 miliardi e mezzo di volte maggiore di Vega e noi dovevamo trovare la magnitudine apparente del sole. A questo scopo ho dovuto trovare la formula inversa, quella che esprime la luminosità in funzione della magnitudine. Ho usato la formula della funzione esponenziale per due punti...

**Apotema:-** Scrivila con le lettere che ti ho detto.

**Sekky:-** In questo caso diventa

$$L = L_1 \left( \frac{L_2}{L_1} \right)^{\frac{m-m_1}{m_2-m_1}}$$

e, sostituendo i valori di prima

$$L = 100^{\frac{m-6}{-5}} = (10^2)^{\frac{6-m}{5}} = 10^{\frac{2}{5}(6-m)}.$$

A questo punto ho trovato la luminosità apparente di Vega, che corrisponde alla magnitudine zero:

$$L_{Vega} = 10^{\frac{12}{5}} = 251.$$

Ho poi calcolato la luminosità apparente del sole, moltiplicando per 54 miliardi e mezzo:

$$L_{sole} = (54.5 \times 10^9) \cdot 251 = 1.37 \times 10^{13}.$$

Infine, per calcolare la magnitudine apparente del sole ho usato la prima formula:

$$m_{sole} = -\frac{5}{2} \log L_{sole} + 6 = -\frac{5}{2} \log(1.37 \times 10^{13}) + 6 = -26.8.$$

**Apotema:-** Infatti è proprio questa la magnitudine apparente del sole!

**Fuory:-** Così piccola?!

**Gioky:-** Non hai capito che la magnitudine è un po' come l'ordine di arrivo in una gara?

**Fuory:-** E allora? -

**Gioky:-** Prima del primo c'è lo zeresimo, ha detto il prof! E prima dello zeresimo, il menounesimo! Figurati che il sole è arrivato menoventiseiesimo! Anzi, un pochino prima ancora!

**Apotema:-** Poco ortodosso, ma chiaro.

**Geny:-** Io ho trovato una relazione più semplice, che mi ha consentito di trovare direttamente la magnitudine del sole!

**Apotema:-** Prima voglio chiedere a Sekky una cosa. Hai trovato la formula che esprime la magnitudine in termini della luminosità usando l'espressione della funzione logaritmica che passa per due punti, ok? E poi hai trovato la formula inversa usando questa volta l'espressione della funzione esponenziale che passa per due punti. Ma avresti potuto ricavarla direttamente dalla precedente usando le proprietà delle funzioni logaritmiche ed esponenziali, no? Prova a mostrarcelo! -

**Sekky:-** Se ho ben capito, dovrei ricavare  $L$  dalla formula  $m = -\frac{5}{2}\log L + 6$ , vero?

**Apotema:-** Esattamente. Comincia con l'isolare  $\log L$ ...

**Sekky:-** Dunque...  $\frac{5}{2}\log L = 6 - m$ ,  $\log L = \frac{2}{5}(6 - m)$ ... e adesso...

**Apotema:-** Non è difficile...

**Sekky:-** Ah! Applico ad ambo i membri la funzione esponenziale in base 10!

**Apotema:-** Bravo!

**Sekky:-** Ottengo allora che  $L = 10^{\frac{2}{5}(6-m)}$ !

**Apotema:-** E adesso vieni tu, Geny, a mostrarci la tua soluzione!

**Geny:-** Ho cercato di mettere in relazione due magnitudini qualsiasi con le rispettive luminosità. Se  $m_A = -\frac{5}{2}\log L_A + 6$  e

$m_B = -\frac{5}{2}\log L_B + 6$ , allora, se sottraggo le uguaglianze membro

a membro, ottengo che  $m_B - m_A = -\frac{5}{2}(\log L_B - \log L_A)$  e, infine,

$$m_B - m_A = -\frac{5}{2}\log \frac{L_B}{L_A}.$$

Nel nostro caso particolare, la relazione diventa:

$$m_{sole} - m_{Vega} = -\frac{5}{2}\log \frac{L_{sole}}{L_{Vega}}.$$

Tenuto conto dei dati del problema, e cioè che  $m_{Vega} = 0$  e

$\frac{L_{sole}}{L_{Vega}} = 54.5 \times 10^9$ , ricaviamo subito che

$$m_{sole} = -\frac{5}{2} \log(54.5 \times 10^9) = -26.8.$$

**Apotema:-** Benissimo, Geny! Ma, ormai che sei qui alla lavagna, prova a risolvere questo problema. Capita che due stelle molto lontane tra loro vengano viste dalla Terra quasi esattamente nella stessa direzione, al punto che solo con un telescopio ci accorgiamo che si tratta di due stelle diverse. Diciamo in questo caso che si tratta di una stella doppia ottica, per distinguerla dalle stelle doppie fisiche in cui le due componenti sono realmente legate tra loro gravitazionalmente. Supponiamo allora di avere una stella doppia ottica formata da due stelle, *A* e *B*, che hanno rispettivamente magnitudine 3.5 e 2.8. Qual è la magnitudine complessiva quando ci sembrano un'unica stella?

**Fuory:-** 6.3!

**Apotema:-** No, caro Fuory! Non vale la sovrapposizione degli effetti, come avremo modo di chiarire molto presto!

**Geny:-** Calcolo prima le loro luminosità apparenti e quelle sì che le posso sommare!

**Apotema:-** Avete capito tutti? Non posso sommare le magnitudini, ma le luminosità apparenti! Se ricevo tot energia luminosa dalla prima e tot dalla seconda, quelle sì che si sommano, ma non le magnitudini!

**Geny:-** Calcolo  $L_A = 10^{\frac{2}{5}(6-m_A)} = 10^{\frac{2}{5}(6-3.5)} = 10$  ! Calcolo poi

$L_B = 10^{\frac{2}{5}(6-m_B)} = 10^{\frac{2}{5}(6-2.8)} = 10^{\frac{6.4}{5}} = 19.0$ . Ora  $L_A + L_B = 29.0$  e la

magnitudine complessiva è  $m = -\frac{5}{2} \log 29.0 + 6 = 2.3$ .

**Apotema:-** Fuory aveva detto due stupidaggini in un solo numero! Primo, le magnitudini non si sommano. Secondo, se le stelle le prendo insieme non c'è dubbio che la luminosità complessiva è maggiore e quindi la magnitudine complessiva deve essere espressa da un numero più piccolo di ciascuno dei due numeri precedenti!

**Fuory:-** In effetti...

**Apotema:-** Nel nostro caso, una stella di magnitudine 3.5 e una,

più luminosa, di magnitudine 2.8, hanno formato insieme una stella di magnitudine 2.3!

**Geny:-** Vado al posto?

**Apotema:-** Certo, Geny. E adesso vediamo di trovare l'espressione delle funzioni potenze. Cominciamo dalle funzioni potenze pure, e cioè da quelle che... Chi me lo dice?

**Svelty:-** Quelle che in 1 valgono 1!

**Apotema:-** Esattamente. Cerchiamo dunque la forma della funzione potenza che manda la progressione geometrica

$$\dots, q^{-2}, q^{-1}, 1, q, q^2, \dots$$

nella progressione geometrica

$$\dots, Q^{-2}, Q^{-1}, 1, Q, Q^2, \dots$$

A te, Furby!

**Furby:-** Prima applico la funzione logaritmica in base  $q$  e ottengo la progressione degli interi

$$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

e, infine, la funzione esponenziale in base  $Q$

$$\dots Q^{-2}, Q^{-1}, 1, Q, Q^2, \dots$$

**Apotema:-** Dunque, la funzione cercata è la funzione  $f(x) = Q^{\log_q x}$ . Se applichiamo la formula del cambio di base e scriviamo  $Q$  come  $q^{\log_q Q}$ , la funzione diventa

$$f(x) = \left( q^{\log_q Q} \right)^{\log_q x} = \left( q^{\log_q x} \right)^{\log_q Q} = x^{\log_q Q}.$$

Dunque, una funzione potenza pura è del tipo  $f(x) = x^b$ . E una funzione potenza in generale?

**Normy:-** Ormai il trucco è sempre quello! La si divide per il suo valore in 1!

**Apotema:-** Benissimo. Se  $f$  è una generica funzione potenza e poniamo  $g(x) = \frac{f(x)}{a}$ , dove  $a = f(1)$ , allora  $g(1) = \frac{f(1)}{a} = 1$ . Inoltre, poiché se dividiamo tutti i termini di una progressione geometrica per uno stesso numero positivo si ottiene ancora una progressione geometrica,  $g$  è ancora una funzione potenza e, in particolare, una funzione potenza pura. Possiamo allora

affermare che  $g(x) = x^b$  e quindi che  $\frac{f(x)}{a} = x^b$ , da cui segue che  $f(x) = ax^b$ . Abbiamo così trovato la forma generale anche per le funzioni potenze. Resta da trovare la forma della funzione potenza che manda una data progressione geometrica

$$\dots, cq^{-2}, cq^{-1}, c, cq, cq^2, \dots$$

in una data progressione geometrica

$$\dots CQ^{-2}, CQ^{-1}, C, CQ, CQ^2, \dots$$

Questa volta dillo tu, Normy!

**Normy:-** Allora... Prima divido per  $c$ , poi applico  $\log_q$ ,  $\exp_Q$  e, infine, moltiplico per  $C$ !

**Apotema:-** Vedo che hai capito perfettamente, Normy! Abbiamo così ottenuto la funzione cercata come composizione delle

funzioni " $/c$ ",  $\log_q$ ,  $\exp_Q$ , " $\times C$ " e quindi  $f(x) = CQ^{\log_q \frac{x}{c}}$ . Se operiamo un cambiamento di base, come abbiamo fatto prima, esprimendo  $Q$  nella forma  $q^{\log_q Q}$ , allora la funzione si può

scrivere nella forma  $f(x) = C \left( \frac{x}{c} \right)^{\log_q Q}$ . Proviamo allora a

calcolare l'esponente nella Terza Legge di Keplero dai dati di due pianeti. Ricordate che avevamo già verificato che la funzione che lega il semiasse maggiore al periodo è una funzione potenza. Guardate sul quaderno e ricordatemi i dati di Venere e Giove!

**Sekky:-** Ecco, professore! Venere ha un semiasse maggiore di 0.723 unità astronomiche, mentre quello di Giove è 5.203. Per il rapporto tra il semiasse di Giove e quello di Venere avevamo ottenuto 7.196. -

**Apotema:-** Grazie, Sekky. Abbiamo allora che  $q = 7.196$ . Passa ai periodi, Sekky!

**Sekky:-** Venere ha un periodo di 0.615 anni, mentre quello di Giove è 11.863. Avevamo già calcolato la ragione, e cioè il rapporto, che fa 19.289.

**Apotema:-** Allora  $Q = 19.289$ . L'esponente della funzione potenza che esprime il periodo in termini del semiasse maggiore

è allora  $b = \log_q Q = \log_{7.196} 19.289 = \frac{\log 19.289}{\log 7.196} = 1.500$ . Con

eccellente precisione l'esponente è  $3/2$ . Possiamo allora dire che la funzione che esprime il periodo  $T$  in termini del semiasse

maggiore  $a$  ha la forma  $T = ka^{\frac{3}{2}}$ . Se eleviamo al quadrato ambo i membri, otteniamo che  $T^2 = k^2 a^3$  e cioè che i quadrati dei periodi sono direttamente proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori.

**Normy:-** L'avevamo imparata così la Terza Legge di Keplero!

**Dubby:-** Ma Keplero l'ha scoperta con le progressioni geometriche?

**Apotema:-** Non sappiamo esattamente quali calcoli l'abbiano portato alla sua scoperta, ma posso dirvi che esiste una legge, detta di Titius-Bode, che afferma che i semiassi maggiori dei pianeti sono, con discreta approssimazione, termini di una progressione geometrica. Questa legge ha avuto un ruolo centrale nella scoperta del pianeta Nettuno. -

**Ovvy:-** Ma allora anche i periodi dei pianeti sono termini di una progressione geometrica! -

**Apotema:-** Inevitabilmente. Anche se non l'ho mai sentito dire esplicitamente... La chiameremo la Legge di Ovvy!

**Ovvy:-** Che onore!

**Fuory:-** Stavo per dirlo io!

**Rozzy:-** L'unica volta che la dicevi giusta!

**Fuory:-** Già! E ho perso anche l'opportunità di dare il nome a una legge!

**Apotema:-** Per consolarti, ti do l'opportunità di dirmi qual è la forma della funzione potenza  $f$ , con  $f(x_1) = y_1$  e  $f(x_2) = y_2$ .

**Fuory:-** Allora...

**Apotema:-** Basta usare il risultato precedente, e cioè che la funzione potenza che manda la progressione geometrica

$$\dots, cq^{-2}, cq^{-1}, c, cq, cq^2, \dots$$

nella progressione geometrica

$$\dots CQ^{-2}, CQ^{-1}, C, CQ, CQ^2, \dots$$

ha la forma

$$f(x) = C \left( \frac{x}{c} \right)^{\log_q Q}.$$

**Fuory:-** Ah, sì! Prendo  $c = x_1$ ,  $C = y_1$  come valori di riferimento,

e poi come ragioni prendo  $q = \frac{x_2}{x_1}$  e  $Q = \frac{y_2}{y_1}$  !

**Apotema:-** Vieni alla lavagna a scrivere la formula, prima che venga un terremoto!

**Fuory:-** L'espressione della funzione potenza è

$$f(x) = y_1 \left( \frac{x}{x_1} \right)^{\log_{\frac{x_2}{x_1}} \frac{y_2}{y_1}}.$$

(Un applauso)

**Apotema:-** Che dire, Fuory? Oggi ci hai sbalordito!

**Fuory:-** Quando sono concentrato...

**Apotema:-** Concludiamo la lezione con una osservazione. Abbiamo trovato le espressioni per le funzioni lineari, esponenziali, logaritmiche e potenze noti i valori che esse assumono su due numeri. Nel caso di funzioni pure basta il valore su un solo numero. Ovviamente non si tratta di un miracolo, ma del fatto che, per il solo fatto di aver affermato che si tratta di funzioni pure, in realtà è già noto il valore che esse assumono su un altro punto. Per esempio, supponiamo di voler determinare la forma della funzione lineare pura  $f$ , con  $f(x_0) = y_0$ . Poiché  $f$  è una funzione lineare pura, sappiamo che  $f(0) = 0$ . Se ora usiamo la forma della funzione lineare per due punti

$$f(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

e poniamo  $x_1 = y_1 = 0$ ,  $x_2 = x_0$  e  $y_2 = y_0$ , ricaviamo subito che

$$f(x) = \frac{y_0}{x_0} x.$$

In modo analogo possiamo ricavare le espressioni delle funzioni pure esponenziali, logaritmiche e potenze noto il valore  $y_0$  nel punto  $x_0$ . Ma questo lo lascio a voi per la prossima volta!

## LEZIONE XI

**Apotema:-** Oggi introduciamo il linguaggio causa/effetto per le funzioni in generale e, in particolare, per le quattro classi di funzioni che stiamo studiando.

**Sekky:-** Professore, non correggiamo il compito?

**Apotema:-** Hai ragione, Sekky, cominciamo con la correzione del compito per casa. Dovevate determinare l'espressione per le funzioni pure di ciascun tipo mediante il valore in un solo punto, dico bene?

**Sekky:-** Esattamente, professore. Avevamo già visto in classe che la funzione lineare pura  $f$ , con  $f(x_0) = y_0$ , ha la forma

$$f(x) = \frac{y_0}{x_0} x.$$

**Apotema:-** Bene. Per quanto riguarda la funzione esponenziale pura  $f$  con  $f(x_0) = y_0$ , si procede in modo del tutto analogo. Basta ricordare che  $f(0) = 1$  e l'espressione della funzione

esponenziale per due punti:  $f(x) = y_1 \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}$ . Posto  $x_1 = 0$ ,

$y_1 = 1$ ,  $x_2 = x_0$ ,  $y_2 = y_0$ , ricaviamo che

$$f(x) = y_0^{\frac{x}{x_0}}.$$

Nel caso di una funzione logaritmica pura abbiamo invece che

$f(1) = 0$  e la formula  $f(x) = y_1 + (y_2 - y_1) \log_{\frac{x_2}{x_1}} \frac{x}{x_1}$ , diventa

$$f(x) = y_0 \log_{x_0} x.$$

Per le funzioni potenze pure, infine, abbiamo che  $f(1) = 1$  e la

formula  $f(x) = y_1 \left( \frac{x}{x_1} \right)^{\log_{\frac{x_2}{x_1}} \frac{y_2}{y_1}}$  diventa

$$f(x) = x^{\log_{x_0} y_0}.$$

**Sekky:-** Io ho proceduto diversamente, ma ho dovuto fare più

calcoli...

**Apotema:** - Immagino che tu sia partito dalla forma delle funzioni pure, vero?

**Sekky:** - Proprio così, professore.

**Apotema:** - Vieni lo stesso alla lavagna a mostrarci come hai fatto, Sekky.

**Sekky:** - Per le funzioni lineari pure, sapendo che  $f(x) = bx$ , ho imposto che sia  $f(x_0) = y_0$  e quindi che sia  $y_0 = bx_0$ , da cui ho ricavato che deve essere  $b = \frac{y_0}{x_0}$ . A questo punto la funzione

cercata è  $f(x) = \frac{y_0}{x_0} x$ .

**Apotema:** - Giustissimo, Sekky.

**Sekky:** - Per le funzioni esponenziali pure, poiché hanno la forma  $f(x) = b^x$ , ho ottenuto l'equazione  $y_0 = b^{x_0}$ . Per ricavare  $b$  ho allora elevato ambo i membri alla  $\frac{1}{x_0}$ , arrivando così al

risultato  $b = y_0^{\frac{1}{x_0}}$ . Sostituendo il valore trovato per  $b$  nell'espressione delle funzione esponenziale pura, ho subito

ottenuto che  $f(x) = \left( y_0^{\frac{1}{x_0}} \right)^x = y_0^{\frac{x}{x_0}}$ .

**Apotema:** - Fin qui hai fatto un ottimo lavoro!

**Sekky:** - Poi sono passato alle funzioni logaritmiche pure, che hanno la forma  $f(x) = \log_b x$ . Ho così ottenuto l'equazione  $y_0 = \log_b x_0$ , ma non sono riuscito ad arrivare fino in fondo.

**Svelty:** - Si ricava subito che  $b^{y_0} = x_0$  e quindi che  $b = x_0^{\frac{1}{y_0}}$ !

**Sekky:** - Fin lì c'ero arrivato anche io, ma poi ottieni una formula complicata:  $y = \log_{x_0^{\frac{1}{y_0}}} x$ !

**Asy:** - Che roba!

**Geny:** - Si può usare la formula del cambio di base e passare da base  $x_0^{\frac{1}{y_0}}$  a base  $x_0$ !

**Sekky:-** Diventa ...  $y = \frac{\log_{x_0} x}{\log_{x_0} x_0 y_0} \dots$

**Apotema:-** E quanto fa  $\log_{x_0} x_0 y_0$  ?

**Sekky:-** Fa  $\frac{1}{y_0}$  !

**Apotema:-** Ormai è fatta...

**Sekky:-**  $y = \frac{\log_{x_0} x}{\log_{x_0} x_0 y_0} = \frac{\log_{x_0} x}{\frac{1}{y_0}} = y_0 \log_{x_0} x$  . Era difficile!

**Geny:-** Si potevano dividere subito membro a membro le due uguaglianze  $f(x) = \log_b x$  e  $y_0 = \log_b x_0$  !

**Sekky:-** Si ottiene  $\frac{f(x)}{y_0} = \frac{\log_b x}{\log_b x_0}$  . E allora?

**Geny:-** A destra resta  $\log_{x_0} x$  !

**Sekky:-** Vero! La formula del cambio di base! Si faceva in un attimo!

**Scetty:-** E se  $y_0 = 0$  ?

**Geny:-** Non può essere  $x_0 = 1$  e  $y_0 = 0$  , perché abbiamo già usato il fatto che  $f(1) = 0$  ! Il punto  $x_0$  deve essere un punto diverso!

**Apotema:-** Bravo Geny! Con le potenze si dovrebbe fare altrettanto presto.

**Sekky:-** Con le potenze non ho avuto problemi. Una funzione potenza pura ha la forma  $f(x) = x^b$  e noi aggiungiamo la condizione  $y_0 = x_0^b$  . Ho applicato la funzione logaritmica in base  $x_0$  ad ambo i membri e ho ottenuto  $\log_{x_0} y_0 = b$  e quindi che  $f(x) = x^{\log_{x_0} y_0}$  .

**Apotema:-** Bene, Sekky. Se non altro abbiamo apprezzato la comodità delle formule che esprimono ciascuno dei quattro tipi di funzioni dati i valori in due punti!

**Normy:-** Ma, a questo punto, cosa altro ci resta da vedere sulle funzioni lineari, esponenziali, logaritmiche e potenze?

**Apotema:-** Oh, ancora molte cose! Come vi dicevo all'inizio della lezione, voglio introdurvi il linguaggio causa/effetto e un altro modo molto utile di caratterizzare le funzioni pure di ciascuno dei quattro tipi. Consideriamo una funzione  $f: A \rightarrow B$ , dove  $A$  e  $B$  sono due insiemi qualsiasi. Se  $f(a) = b$  diciamo che  $a$  è la causa che produce l'effetto  $b$ .

**Normy:-** Quindi la causa è l'ingresso, mentre l'effetto è l'uscita corrispondente?

**Apotema:-** Esattamente. Cominciamo ancora una volta dalle funzioni lineari. Una funzione lineare pura ha la forma  $f(x) = bx$ .

**Normy:-** La causa  $x$  produce l'effetto  $bx$ !

**Apotema:-** Benissimo, Normy. Supponiamo adesso che la causa  $x$  sia la somma di due cause  $x_1$  e  $x_2$ , cioè che sia  $x = x_1 + x_2$ . La causa  $x_1$  produce da sola l'effetto  $y_1 = f(x_1)$ , mentre la causa  $x_2$  produce da sola l'effetto  $y_2 = f(x_2)$ . Quale relazione sussiste tra l'effetto prodotto dalla causa  $x = x_1 + x_2$  e gli effetti dovuti alle singole cause? Andiamo a vedere! L'effetto dovuto alla somma  $x_1 + x_2$  delle due cause è  $f(x_1 + x_2) = b(x_1 + x_2)$ . Ora  $b(x_1 + x_2) = bx_1 + bx_2$ , ma  $bx_1 = f(x_1)$  e  $bx_2 = f(x_2)$  e quindi l'effetto dovuto alla somma di due cause è la somma degli effetti dovuti a ogni singola causa. Con un linguaggio più impreciso, ma più conciso, si dice che l'effetto della somma è la somma degli effetti. Si dice anche che vale la sovrapposizione degli effetti. Una funzione gode di questa proprietà quando

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

Tutte le funzioni lineari pure godono di questa proprietà. Ce ne sono altre, oltre a quelle? Supponendo, ancora una volta, che si tratti di funzioni monotone, ecco che la risposta è che non ce ne sono altre! Prendiamo la funzione quadrato. La causa 3 produce l'effetto 9 e la causa 4 produce l'effetto 16, ma la causa  $7 = 3 + 4$  non produce l'effetto  $9 + 16 = 25$ , ma l'effetto 49! Per la funzione quadrato non vale la sovrapposizione degli effetti: il quadrato della somma non è la somma dei quadrati!

**Normy:-** C'è anche il doppio prodotto!

**Apotema:-** Proprio così, Normy. E la funzione seno? Il seno

della somma è la somma dei seni?

**Sekky:-** No, professore! Il seno della somma è il seno del primo per il coseno del secondo più il seno del secondo per il coseno del primo!

**Apotema:-** Nemmeno la funzione seno soddisfa la sovrapposizione degli effetti. E nemmeno le funzioni lineari non pure! La funzione doppio più uno non soddisfa la sovrapposizione degli effetti! La causa 2 produce l'effetto 5 e la causa 3 produce l'effetto 7, ma la causa  $5 = 2 + 3$  non produce l'effetto  $5 + 7 = 12$ , ma l'effetto 11! Solo le funzioni lineari pure godono della proprietà che abbiamo chiamato della sovrapposizione degli effetti!

**Scetty:-** E come facciamo a esserne sicuri?

**Apotema:-** Supponiamo di avere una funzione  $f$  sui reali, monotona, per la quale si abbia che  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$  per ogni coppia di numeri  $x_1$  e  $x_2$ . Dobbiamo fare vedere che la funzione manda progressioni aritmetiche in progressioni aritmetiche e che  $f(0) = 0$ , ok?

**Normy:-** E come si fa se non sappiamo come è fatta la funzione  $f$ ?

**Apotema:-** Sappiamo che vale la sovrapposizione degli effetti! Consideriamo una generica progressione aritmetica

$$\dots, c - 2d, c - d, c, c + d, c + 2d, \dots$$

e vediamo se viene mandata in un'altra progressione aritmetica. Se  $x$  è un qualsiasi termine della progressione, allora il termine successivo è  $x + d$  e  $f(x + d) = f(x) + f(d)$ , per la sovrapposizione degli effetti. Questo significa che la successione in uscita è tale che ogni termine si ottiene dal precedente sommando sempre il numero  $f(d)$ . Ma allora si tratta di una progressione aritmetica! Siccome poi  $0 = 0 + 0$ , allora  $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$  e quindi  $f(0) = 0$ ! Abbiamo così dimostrato che una funzione monotona per la quale vale la sovrapposizione degli effetti è una funzione lineare pura. Avevamo già visto che le funzioni lineari pure verificano la sovrapposizione degli effetti e quindi la conclusione è che le funzioni monotone che verificano la sovrapposizione degli effetti sono esattamente le funzioni lineari pure!

**Dubby:-** E a che cosa ci serve sapere questo?

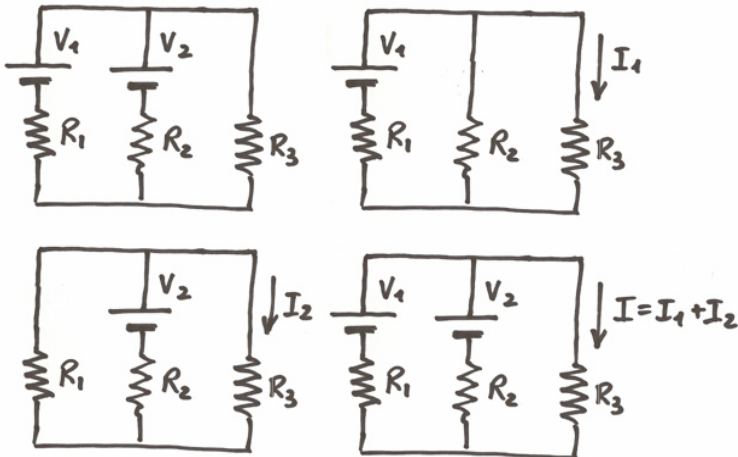
**Apotema:-** Possiamo farne due usi diversi. Se sappiamo che una funzione è lineare pura allora possiamo usare il fatto che vale la sovrapposizione degli effetti, se invece sappiamo che una funzione verifica la sovrapposizione degli effetti allora possiamo dedurne che è lineare pura!

**Dubby:-** Non capisco...

**Normy:-** Ma tutto questo c'entra qualcosa col metodo della sovrapposizione degli effetti che abbiamo usato per i circuiti in corrente continua?

**Apotema:-** Certamente! In quel caso avete usato la Legge di Ohm, che afferma che  $V = RI$ . Si tratta di una funzione lineare pura del tipo  $y = bx$ . Nel linguaggio causa/effetto possiamo pensare che la corrente  $I$  che attraversa un conduttore sia la causa che produce come effetto la caduta di tensione  $V$  ai suoi capi. Anche la sua inversa  $I = \frac{V}{R}$ , che a volte si scrive  $I = GV$ , è

ancora una funzione lineare pura. In questo caso è comodo pensare che la tensione  $V$  ai capi di un conduttore sia la causa che produce come effetto la corrente  $I$  che lo attraversa.



**Dubby:-** Ma qual è realmente la causa?

**Apotema:-** La Legge di Ohm non parla di causa e di effetto, ma dice che se c'è una tensione allora c'è una corrente e viceversa. Siamo noi che siamo portati a ragionare in termini di causa e di effetto! Si tratta di un nostro modo istintivo di ragionare che a volte è persino utile! Supponiamo di avere un circuito con due generatori di tensione e alcune resistenze, collegate in qualche modo e di voler determinare la corrente che circola in un certo ramo del circuito. Possiamo utilmente pensare che la tensione sia la causa e la corrente l'effetto. Siccome la funzione che lega la tensione alla corrente è lineare pura, sappiamo che vale la sovrapposizione degli effetti. Allora immaginiamo che nel circuito ci sia solo il primo generatore di tensione e cortocircuitiamo l'altro. Come tutti voi ben sapete fare in questo semplice caso, determiniamo la corrente  $I_1$  che circola nel ramo che ci interessa. Adesso facciamo la stessa cosa col secondo generatore di tensione e calcoliamo la corrente  $I_2$  che circola in quel ramo. Bene, la corrente che circola nel ramo quando abbiamo tutti e due i generatori di tensione è semplicemente  $I = I_1 + I_2$ . L'effetto della somma è la somma degli effetti!

**Normy:-** Adesso ho capito perché facevamo così!

**Apotema:-** Quando vale la sovrapposizione degli effetti, e cioè quando abbiamo a che fare con una funzione lineare pura, allora siamo in una posizione particolarmente fortunata. Di solito se uno sa vincere uno alla volta i suoi nemici non sa vincerli anche tutti insieme, convenite?

**Rozzy:-** Certo, prof! Un'ape la schiaccio, ma mille api mi uccidono!

**Bronty:-** A me una volta ha punto anche un'ape sola!

**Asy:-** Anche a me!

**Apotema:-** Quando vale la sovrapposizione degli effetti vi trovate nella formidabile condizione in cui se sapete vincere uno per uno i vostri nemici, allora li sapete vincere anche tutti insieme!

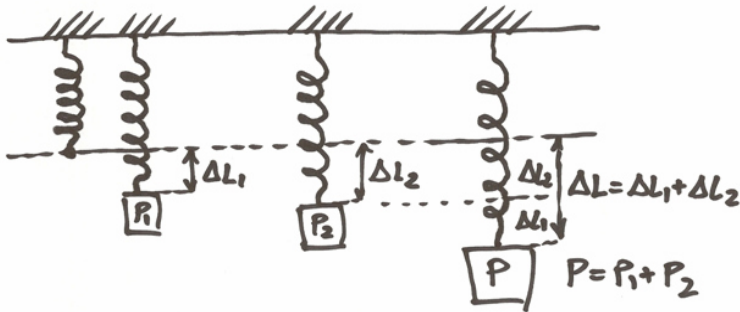
**Sogny:-** Bello!

**Apotema:-** Viceversa, se riuscite a sapere che per una funzione vale la sovrapposizione degli effetti, allora potete subito concludere che si tratta di una funzione lineare pura.

**Normy:-** Ad esempio?

**Apotema:-** Consideriamo una molla che pende da un supporto.

Appendiamo alla molla un peso  $P_1$  e misuriamo un allungamento  $\Delta L_1$ . Appendiamo ora un peso  $P_2$  e misuriamo un allungamento  $\Delta L_2$ . Se ora appendiamo il peso  $P$  con  $P = P_1 + P_2$  ecco che l'esperienza ci mostra che l'allungamento prodotto (se non esageriamo coi pesi al punto da snervare la molla!) è ora  $\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2$ . Se pensiamo l'allungamento come funzione del peso ecco che vale la sovrapposizione degli effetti e sarà dunque  $\Delta L = bP$ . Avremo anche  $P = \frac{1}{b} \Delta L = k \Delta L$ , dove  $k$  è la cosiddetta costante elastica della molla.



**Sekky:-** Questa legge l'avevamo vista in fisica al biennio!

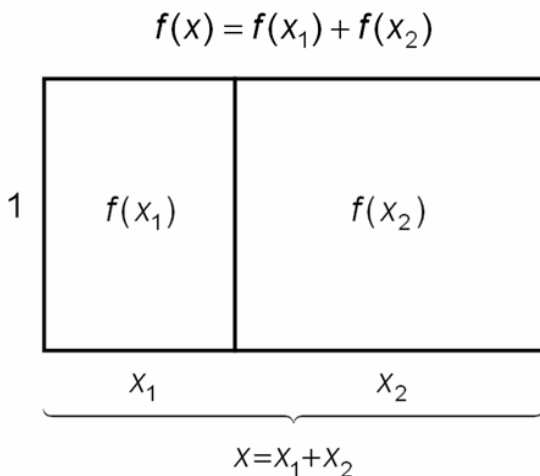
**Apotema:-** Vi faccio ora un esempio arcinoto: l'area di un rettangolo.

**Ovvy:-** Il prodotto dei lati!

**Apotema:-** Grazie, Ovvy! So bene che non è una novità, ma voglio farvi vedere l'uso della sovrapposizione degli effetti! Consideriamo un rettangolo con un lato di misura 1 e l'altro lato di misura  $x$ . Indichiamo con  $f(x)$  l'area al variare di  $x$ .

**Ovvy:-** Vale  $x$ !

**Apotema:-** Vi ripeto per l'ultima volta che voglio mostrarvi come ricavare la formula dell'area del rettangolo, che dovete fare il sacrificio di fingere di non conoscere, esclusivamente per mostrarvi un uso della sovrapposizione degli effetti!

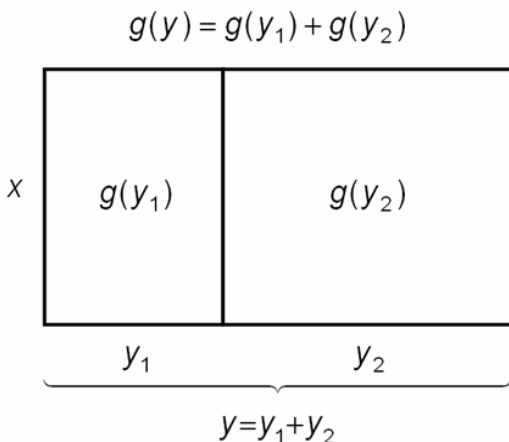


Riprendiamo il discorso... Se penso il lato di misura  $x$  come somma di due segmenti di misura  $x_1$  e  $x_2$  e quindi il rettangolo come somma dei due rettangoli, ecco che l'area del rettangolo di lato  $x$  è la somma delle aree dei rettangoli di lati  $x_1$  e  $x_2$ . Dunque  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$  e vale la sovrapposizione degli effetti! Allora  $f(x) = bx$  e siccome per  $x=1$  si ottiene un quadrato di lato 1, che assumiamo come unità di misura per le aree, allora  $b=1$  e  $f(x) = x$ ... Ovvv, zitto!

**Ovvv:-** Non ho detto niente, prof!

**Apotema:-** Consideriamo ora un rettangolo con un lato di misura  $x$  e uno di misura  $y$  e sia  $g(y)$  la funzione che esprime l'area del rettangolo al variare di  $y$  mentre il lato  $x$  resta fisso. Ancora una volta, se penso il lato di misura  $y$  come somma di due segmenti di misura  $y_1$  e  $y_2$  e quindi il rettangolo come somma dei due rettangoli, ecco che l'area del rettangolo di lati  $x$  e  $y$  è la somma dell'area del rettangolo di lati  $x$  e  $y_1$  con l'area del rettangolo di lati  $x$  e  $y_2$ . Dunque  $g(y_1 + y_2) = g(y_1) + g(y_2)$  e anche per la funzione  $g$  vale la sovrapposizione degli effetti! Ne segue che  $g(y) = By$ . Per determinare  $B$  poniamo  $y=1$ . In

questo caso otteniamo un rettangolo con un lato di misura  $x$  e uno di misura  $1$  e quindi di area  $x$ . Dunque  $B = x$  e  $g(y) = xy$ , che è appunto la formula per l'area di un rettangolo di lati  $x$  e  $y$ !



**Asy:-** Lo sapevo persino io!

**Apotema:-** Ribadisco che lo scopo di questo discorso era quello di mostrare come si usa la sovrapposizione degli effetti! Probabilmente, nella scuola dell'obbligo siete arrivati a questo risultato prima considerando rettangoli con lati di misura intera e contando i quadretti, poi con misura razionale passando a quadretti di lato un sottomultiplo comune dei lati e poi, senza scendere troppo in dettaglio, siete passati ai lati di misura irrazionale approssimandoli con decimali finiti. Se ci pensate, questo procedimento non è miracolosamente stato evitato, ma giace nascosto nel fatto che una funzione monotona che manda progressioni aritmetiche in aritmetiche e lo zero nello zero ha effettivamente la forma che abbiamo affermato avere. Nel percorso che abbiamo seguito era contenuto lo stesso processo di approssimazioni successive!

**Scetty:-** Per affermare che se vale la sovrapposizione degli effetti allora la funzione è lineare pura, occorre anche verificare che sia monotona! E noi non l'abbiamo fatto né per la molla né per l'area!

**Apotema:-** Vero, Scetty. Hai perfettamente ragione! Per la

molla basta osservare che quando il peso aumenta, aumenta anche la lunghezza della molla. Per il rettangolo basta osservare che se un lato aumenta e l'altro resta fermo, allora l'area aumenta. Fatti evidenti ma che, come hai giustamente osservato, andavano considerati.

**Dubby:-** E per le altre funzioni?

**Apotema:-** Per le altre funzioni non può certo valere la sovrapposizione degli effetti! Ma varranno proprietà analoghe. Un po' di pazienza! Intanto, per la prossima volta, provate a vedere come sono fatti i grafici delle funzioni potenze. Del resto conoscete già bene quelli delle potenze a esponente intero, che sono definite non solo sui numeri positivi, e non dovrebbe essere difficile. Provate anche a studiare la composizione di una funzione potenza con una logaritmica e quella di una funzione esponenziale con una funzione potenza. Come se non bastasse, vedete di studiare anche la composizione di due funzioni potenze.

**Bronty:-** Direi che può bastare...

**Apotema:-** Hai ragione, Bronty.



## LEZIONE XII

**Dubby:-** Prof! Io ho fatto i grafici delle funzioni potenze, ma... Perché al pc, se l'esponente è intero, il grafico esiste anche per i reali negativi, mentre se l'esponente non è intero, solo per i positivi?

**Fuory:-** Anche con la mia calcolatrice grafica!

**Apotema:-** Tanto per cominciare, vi avevo chiesto di capire come erano fatti e non semplicemente di disegnarli con un software di matematica o con una calcolatrice grafica. Inoltre, vi avevo ricordato io stesso che le funzioni potenze a esponente intero, che dovrete conoscere già, non sono definite solo per i numeri positivi!

**Dubby:-** Il fatto è che non ricordo più perché!

**Apotema:-** Perché il quadrato, il cubo, la quarta potenza, ecc... li puoi fare di un qualsiasi numero reale, no? Se invece l'esponente è intero ma negativo, allora le funzioni potenze non esistono nello zero.

**Fuory:-** Io questo lo ricordavo bene, e anche i grafici! Ma adesso non ricordo più come mai le potenze a esponente non intero esistono solo per i numeri positivi!

**Apotema:-** Forse perché non ricordi più come le abbiamo definite. Una funzione potenza è una funzione monotona che manda progressioni geometriche in progressioni geometriche e le progressioni geometriche hanno i termini positivi!

**Fuory:-** Il fatto è che non ricordo più nemmeno perché le progressioni geometriche hanno solo termini positivi! Non si può moltiplicare sempre per  $-3$ ? Perché la successione  $2, -6, 18, -54$  non deve essere una progressione geometrica?

**Asy:-** Già, che cosa ha fatto di male?

**Apotema:-** Non dirmi che non ti ricordi più nemmeno dell'algoritmo dell'inserimento successivo di medi, altrimenti ti faccio ricoverare in un ospizio!

**Gioky:-** *Amnesy International!*

**Fuory:-** Certo che me lo ricordo!

**Apotema:-** E, nel caso di una progressione geometrica, come si inserisce un medio tra due numeri  $a$  e  $b$ ?

**Fuory:-** La media geometrica!

**Apotema:-** Che si calcola come?

**Fuory:-** La radice del prodotto! -

**Apotema:-** Prendi allora la tua bella progressione geometrica di prima. Che medio inserisci tra 2 e -6?

**Fuory:-** La radice di meno... Accidenti! Non si può!

**Apotema:-** Bravo Fuory! Allora vieni tu, Dubby, alla lavagna.

**Dubby:-** Ok, prof. Comincio dalle potenze pure.

**Apotema:-** Ottima idea.

**Dubby:-** Me li ricordo così i grafici di  $y = x^n$  quando  $n$  è un intero positivo: parto da  $n = 1$ , che viene la retta  $y = x$  ... anche se adesso è solo una semiretta... la bisettrice del I quadrante.

**Apotema:-** Origine compresa o esclusa?

**Fuory:-** Compresa!

**Asy:-** No! Esclusa!

**Apotema:-** Bravo Asy! E perché?

**Asy:-** Perché Fuory ha detto che è compresa!

**Apotema:-** Dovevo aspettarmelo... Dillo tu, Normy!

**Normy:-** Perché le funzioni potenze, nel caso generale, sono definite solo per i numeri positivi!

**Apotema:-** Per fare in modo che anche per le vecchie potenze a esponente intero valga la caratterizzazione in termini di progressioni, restringiamo anche quelle ai reali positivi! E allora, Dubby, hai sprecato inutilmente tanta lavagna disegnando tutti i quadranti! Le funzioni potenze vivono nel I quadrante!

**Dubby:-** Ok, prof! Cancellò!

**Apotema:-** Su, da bravo, prima che io invecchi troppo!

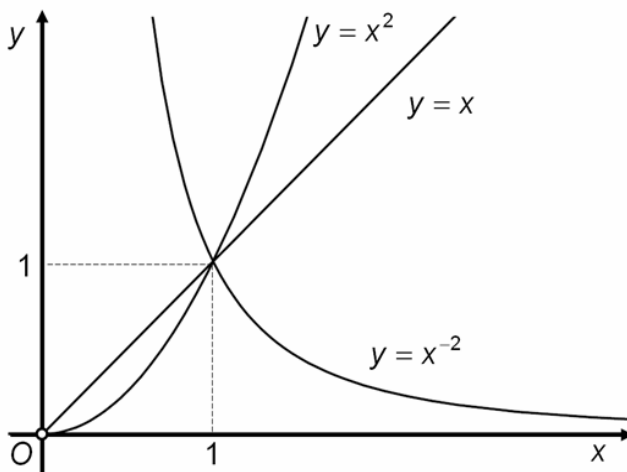
**Dubby:-** Ok! Dicevo che i grafici delle funzioni  $y = x^n$ , quando  $n$  è intero, me li ricordo così. Parto da  $n = 1$ , che è la bisettrice del I quadrante... origine esclusa! Per tutti gli  $n$  i grafici passano per il punto  $(1,1)$  ... Quando  $n$  aumenta, i grafici sono sempre più schiacciati sull'asse  $x$  per  $x < 1$  e crescono sempre più in fretta per  $x > 1$  ... Se invece  $n$  è negativo allora diventano enormi avvicinandoci a zero e si schiacciano sull'asse  $x$  quando  $x$  diventa sempre più grande...

**Apotema:-** E per  $n = 0$ ?

**Dubby:-** La retta... ops... la semiretta  $y = 1$  con  $x > 0$ !

**Apotema:-** Prova a disegnare a parte i grafici di  $y = x^2$  e

$y = x^3$ . Mi basta, ovviamente, un disegno qualitativo.



**Dubby:-** Allora... se  $y = x^2$  ha un grafico così... allora...  $y = x^3$  ha un grafico che sta sotto a quello precedente tra 0 e 1... e sta invece sopra dopo 1... mentre tutti e due vorrebbero valere 0 in 0, ma non ci arrivano!

**Apotema:-** Molto umana questa tua descrizione, ma sostanzialmente esatta. Adesso disegna nell'altra lavagna i grafici di  $y = x^{-2}$  e di  $y = x^{-3}$ .

**Dubby:-** Ecco... il grafico di  $y = x^{-2}$  è fatto circa così... mentre quello di  $y = x^{-3}$ ... sta sopra al precedente tra 0 e 1... perché per i numeri minori di 1 il cubo è minore del quadrato e quindi il suo reciproco è maggiore di quello del quadrato... per i numeri maggiori di 1 succede il contrario e il grafico di  $y = x^{-3}$  si schiaccia a zero più rapidamente di quello di  $y = x^{-2}$ ...

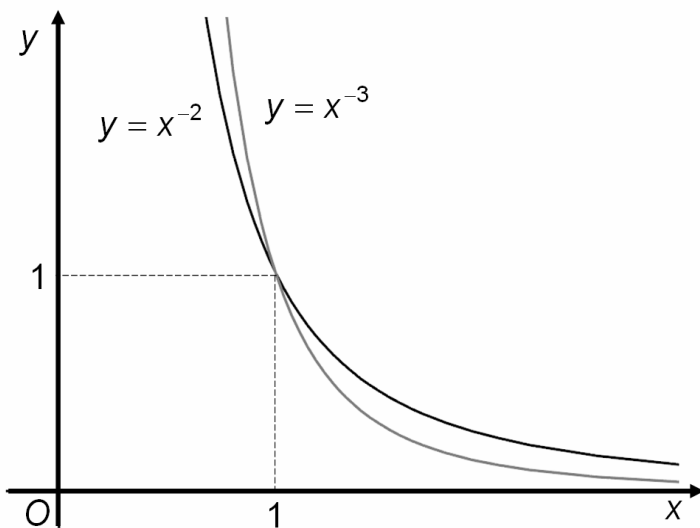
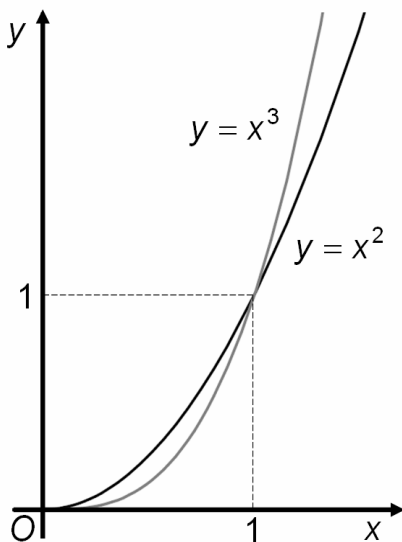
**Apotema:-** Giusto. E come hai ragionato nel caso di esponenti non interi?

**Dubby:-** Mi sono detto che saranno compresi tra due interi e il grafico sarà compreso tra quelli delle due funzioni a esponente intero, no?

**Apotema:-** In effetti è così.

**Dubby:-** Anche i grafici fatti al pc mi hanno dato ragione!

**Apotema:-** È già qualcosa.



**Geny:-** lo ho pensato che se tengo fermo un valore di  $x$  allora i valori di  $y = x^b$  facendo variare l'esponente  $b$  sono quelli di una funzione esponenziale in base  $x$ ! Diciamo  $g(b) = x^b$ . Se  $x$  è tra 0 e 1 la funzione esponenziale è decrescente e quindi i grafici stanno uno sotto all'altro al crescere di  $b$ , mentre se  $x$  segue 1 allora la funzione esponenziale è crescente e i grafici stanno uno sopra all'altro al crescere di  $b$ !

**Apotema:-** Bel colpo, Geny!

**Dubby:-** Mi ha dato ragione, no?

**Apotema:-** Sembra di sì! E cosa avevate ancora di compito?

**Dubby:-** Un momento, prof! Abbiamo visto solo i grafici delle potenze pure!

**Apotema:-** Hai ragione, Dubby! E, secondo te, che cosa succede nel caso generale?

**Dubby:-** Compare il fattore  $a$ , che ha l'effetto di dilatare tutti i grafici in ordinata! Così, invece di passare per il punto  $(1, 1)$ , passano per il punto  $(1, a)$ .

**Apotema:-** Ben detto, Dubby!

**Dubby:-** Poi avevamo da studiare qualche composizione, ma era facile, perché ne abbiamo già viste tante!

**Apotema:-** Quali composizioni?

**Dubby:-** Una funzione esponenziale con una potenza, una potenza con una logaritmica e due potenze.

**Apotema:-** Comincia pure dalla prima.

**Dubby:-** Ormai diamo per buono che la composizione di due funzioni monotone è monotona... L'esponenziale va dai reali nei positivi e la potenza dai positivi nei positivi e quindi si può fare la composizione, che va dai reali nei reali positivi... Poi l'esponenziale manda progressioni aritmetiche in geometriche e la potenza geometriche in geometriche e quindi la composizione manda aritmetiche in geometriche. Una funzione esponenziale!

**Apotema:-** Aggiudicato, Dubby.

**Dubby:-** Si vede subito che una potenza con una logaritmica dà ancora una logaritmica! Perché la composizione va dai reali positivi nei reali e manda progressioni geometriche in aritmetiche! È poi ridicolo vedere che la composizione di due potenze è ancora una potenza!

**Apotema:-** Mi fa molto piacere che tu lo trovi persino ridicolo.

Ma adesso prova a farlo vedere con le formule...

**Dubby:-** Allora... Comincio dalla prima?

**Apotema:-** Ma sì, dai.

**Dubby:-** Se  $f(x) = ab^x$  e  $g(x) = Ax^B$ , allora  $g(f(x)) = A(ab^x)^B$ , e quindi  $g(f(x)) = Aa^B b^{Bx} = (Aa^B)(b^B)^x$ . Un'esponenziale!

**Apotema:-** Devo dire che te la cavi bene, Dubby.

**Dubby:-** Queste cose le ho capite bene! Se  $f(x) = ax^b$  e  $g(x) = A + \log_B x$  allora...  $g(f(x)) = A + \log_B(ax^b)$  e quindi  $g(f(x)) = A + \log_B a + b \log_B x$  ... Si tratta solo di scrivere  $b \log_B x$  come  $\log_C x$  ... anche se dovrei pensarci...

**Apotema:-** Non è vietato pensare quando si usa la matematica, Dubby!

**Dubby:-** Mi piacerebbe che fosse  $b = \frac{1}{\log_B C}$ , così mi verrebbe

la formula del cambio di base...

**Apotema:-** E allora... è già fatta!

**Dubby:-** Deve essere  $\log_B C = \frac{1}{b}$  quindi  $C = B^{\frac{1}{b}}$ !

**Apotema:-** Ok, Dubby! Abbiamo già visto che si può scrivere nella forma  $D + \log_C x$ . Passiamo alle potenze.

**Dubby:-** Questa volta abbiamo che  $f(x) = ax^b$  e  $g(x) = Ax^B$ . La composizione diventa  $g(f(x)) = A(ax^b)^B = Aa^B x^{bB} = (Aa)x^{(bB)}$ . Fatto!

**Apotema:-** Che dire? Sei stato formidabile! Vai pure al posto.

**Dubby:-** Cancello?

**Lenty:-** Aspetta!

**Apotema:-** La scorsa lezione abbiamo visto che una funzione lineare pura è caratterizzata dall'essere monotona e dalla proprietà  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ .

**Svelty:-** L'effetto della somma è la somma degli effetti!

**Apotema:-** Proprio così. Oggi vediamo di caratterizzare in modo analogo le funzioni esponenziali pure. Se  $f$  è una funzione esponenziale pura, allora  $f(x) = b^x$  e

$$f(x_1 + x_2) = b^{x_1 + x_2} = b^{x_1} b^{x_2} = f(x_1) f(x_2).$$

Dunque,  $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$ .

**Sekky:-** L'effetto dovuto alla somma di due cause è il prodotto degli effetti dovuto a ciascuna singola causa!

**Svelty:-** L'effetto della somma è il prodotto degli effetti!

**Apotema:-** Esattamente. Resta da vedere che questa proprietà, insieme alla monotonia, caratterizza completamente le funzioni esponenziali pure. Potremo così usare questa proprietà in due modi: se una funzione è una funzione esponenziale allora vale questa proprietà e, viceversa, ci basta verificare questa proprietà, insieme alla monotonia, per poter affermare che la funzione in questione è una funzione esponenziale pura.

**Svelty:-** Io ho già capito cosa succederà alle funzioni logaritmiche e potenze pure!

**Scopry:-** Anche io!

**Apotema:-** Ormai dovrebbe essere facile indovinare! Del resto è proprio questo il motivo per cui ho voluto trattare insieme queste quattro classi di funzioni!

**Svelty:-** Per le logaritmiche pure, l'effetto del prodotto è la somma degli effetti!

**Scopry:-** Mentre per le potenze pure, l'effetto del prodotto è il prodotto degli effetti!

**Apotema:-** Bravissimi! Ma adesso ci concentriamo sulle funzioni esponenziali pure. Supponiamo di sapere che una funzione  $f$  è monotona e che  $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$  per ogni coppia di valori  $x_1$  e  $x_2$ . Che cosa possiamo dire della funzione? Beh, la prima cosa notevole che possiamo dire è che manda progressioni aritmetiche in progressioni geometriche. Infatti se in  $x$  vale  $f(x)$ , ecco che  $f(x + d) = f(x)f(d)$  e quindi, quando l'ingresso aumenta di un passo costante, l'uscita viene moltiplicata per un fattore costante. Si tratta allora di una funzione esponenziale! Resta da mostrare che  $f(0) = 1$ . Poiché  $0 = 0 + 0$ , dovrà essere  $f(0) = f(0 + 0) = f(0)f(0) = f(0)^2$ , ma allora  $f(0) = f(0)^2$  e quindi...

**Fuory:-** Quindi  $f(0) = 1$ !

**Scetty:-** Potrebbe anche essere  $f(0) = 0$ ! E poi potrebbe essere  $f(d) < 0$  e quindi l'immagine di una progressione aritmetica potrebbe essere una progressione geometrica con termini non tutti positivi, come invece noi avevamo richiesto!

**Apotema:-** Sempre acuto, Scetty!

**Normy:-** E allora?

**Geny:-** Non può essere negativa!

**Scetty:-** E perché mai?

**Geny:-** Perché ogni numero è il doppio della sua metà e quindi ogni valore della funzione è un quadrato!

**Scetty:-** Ma cosa stai dicendo?

**Apotema:-** Vieni alla lavagna, Geny!

**Geny:-** Posso scrivere ogni numero  $x$  nella forma  $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$  e

$$\text{quindi } f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 \geq 0.$$

**Scetty:-** Adesso ho capito che cosa volevi dire! Ma potrebbe valere zero!

**Apotema:-** Che cosa rispondi, Geny?

(Geny è pensieroso)

**Geny:-** Ok, potrebbe valere zero, perché una funzione che vale sempre zero soddisfa la proprietà che l'effetto della somma è il prodotto degli effetti e, essendo costante, è monotona... ma...

**Apotema:-** Ma?

**Geny:-** Ma questa è l'unica possibilità! Se vale zero in un solo numero allora deve valere zero dappertutto!

**Scetty:-** Non ti seguo...

**Geny:-** Abbiamo visto che deve necessariamente essere  $f(0)=1$  o  $f(0)=0$ . Dico che se  $f(0)=0$  la funzione si annulla dappertutto! Infatti  $f(x)=f(x+0)=f(x)f(0)=0$  ! Se invece  $f(0)=1$ , allora è una funzione esponenziale pura!

**Scetty:-** Dunque non è del tutto vero che la proprietà che l'effetto della somma è il prodotto degli effetti caratterizza, insieme alla monotonia, le funzioni esponenziali pure! In mezzo potrebbe capitare anche la funzione nulla!

**Apotema:-** È proprio così. Una funzione  $f$ , monotona, con  $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$  o è identicamente nulla oppure è una funzione esponenziale pura.

**Normy:-** E anche questa proprietà è utile?

**Sogny:-** Anche questa ci consente di ammazzare i nostri nemici tutti insieme se li sappiamo ammazzare uno alla volta?

**Apotema:-** In qualche modo è una situazione analoga a quella della sovrapposizione degli effetti: se conosciamo l'effetto di ogni causa, allora sappiamo anche qual è l'effetto della somma delle cause. Solo che, in questo caso, dobbiamo fare il prodotto degli effetti, invece della somma.

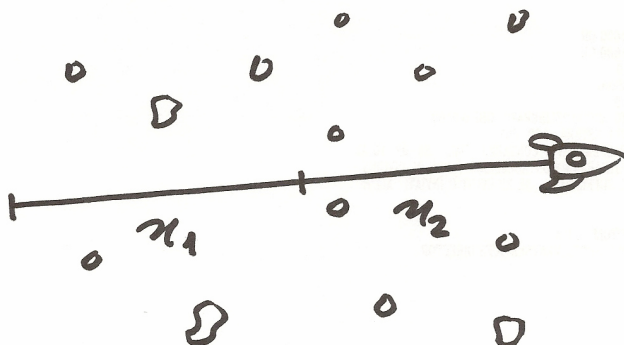
**Normy:-** Vediamo un problema?

**Apotema:-** Più di uno! Cominciamo con un problema non banale di probabilità. Qual è la probabilità che un'astronave che percorre un tratto di lunghezza  $x$  in una regione di spazio dove si trovano sparsi uniformemente dei piccoli asteroidi, non venga colpita da nessun asteroide?

**Dubby:-** Ma come facciamo a trovare la risposta, se non sappiamo niente degli asteroidi?

**Apotema:-** Ovviamente, la risposta richiederà di conoscere qualcosa di più, ma il fatto notevole è che, a meno del valore di un parametro, la legge può già essere trovata!

**Scetty:-** Come è possibile?



**Apotema:-** Indichiamo con  $p(x)$  la probabilità che l'astronave percorra un tratto di lunghezza  $x$  senza essere colpita. Possiamo immaginare di suddividere il tratto in due tratti di lunghezza  $x_1$  e  $x_2$ . La probabilità che l'astronave non sia colpita nel primo tratto è allora  $p(x_1)$ , mentre quella che non sia colpita nel secondo tratto è  $p(x_2)$ . Si tratta di eventi indipendenti! E quindi la probabilità che l'astronave non sia colpita nel primo

tratto e nemmeno nel secondo è il prodotto delle probabilità. Dunque  $p(x_1 + x_2) = p(x_1)p(x_2)$ .

**Normy:-** L'effetto della somma è il prodotto degli effetti!

**Scetty:-** E perché gli eventi sono indipendenti? Se nel primo tratto fosse colpita, questo fatto influenzerebbe il secondo tratto!

**Apotema:-** Indipendenti significa un'altra cosa! Se l'astronave si accinge ad attraversare un tratto, la probabilità di essere colpita non dipende dal fatto che sia il suo primo tratto o che in precedenza ne abbia già percorso un altro! Così come il fatto che il lancio di una moneta sia testa non dipende dal fatto che sia il primo lancio né dal lancio precedente!

**Scetty:-** Ma se nel tratto precedente è stata colpita?

**Apotema:-** Stiamo considerando il caso in cui non sia stata colpita né nel primo tratto né nel secondo!

**Normy:-** Quindi è una funzione esponenziale pura!

**Apotema:-** Sì! E siccome la probabilità per un tratto  $x > 0$  deve essere minore di 1, la base deve essere minore di 1. Deve allora essere  $p(x) = b^x$ , con  $0 < b < 1$ .

**Dubby:-** E come facciamo a sapere quanto vale  $b$ ?

**Apotema:-** Abbiamo che  $b = p(1)$ . Questo significa che  $b$  rappresenta la probabilità che l'astronave non venga colpita in un tratto di lunghezza unitaria, rispetto a una fissata unità di misura. Per esempio un'unità astronomica. Il valore di  $b$  potrebbe essere stimato sperimentalmente osservando diverse astronavi che percorrono un tratto unitario (magari senza equipaggio) e misurando la percentuale di astronavi uscite indenni, oppure con considerazioni di altro tipo che riguardano il numero medio di asteroidi per unità cubica... E qual è la probabilità che venga colpita in un tratto di lunghezza  $x$ ? -

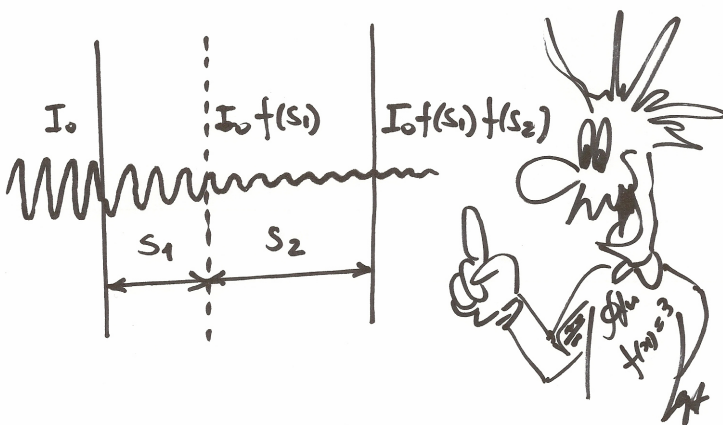
**Geny:-** È  $1 - b^x$ ! L'evento contrario!

**Apotema:-** Esatto. Vedete come è stato facile arrivare alla forma della funzione che esprime la probabilità? Tutto questo grazie alla caratterizzazione delle funzioni esponenziali pure in termini di causa ed effetto.

**Normy:-** E se si tratta di una funzione esponenziale generica?

**Apotema:-** Domanda interessante. Ricordate il problema dell'attenuazione luminosa della lastra di materiale semitrasparente? Vediamo di risolverlo in un altro modo.

Cerchiamo la funzione  $I(s)$  che esprime l'intensità della luce trasmessa da una lastra di spessore  $s$ . Se  $I_0$  è l'intensità della luce incidente, allora la funzione  $f(s) = \frac{I(s)}{I_0}$  misura la percentuale di luce trasmessa. Scomponiamo mentalmente una lastra di spessore  $s$  nella somma di due lastre di spessore  $s_1$  e  $s_2$ . Abbiamo che  $f(s_1)$  è la percentuale di luce trasmessa dal primo strato e quindi la percentuale di luce che incide il secondo strato. La luce trasmessa dal secondo strato è allora la percentuale  $f(s_2)$  della luce trasmessa dal primo strato, che è, a sua volta, la percentuale  $f(s_1)$  della luce incidente il primo strato, cioè del 100%. Ne segue che la luce trasmessa dai due strati, e cioè dallo strato complessivo di spessore  $s_1 + s_2$ , è il prodotto delle percentuali, e cioè  $f(s_1)f(s_2)$ .



Vale dunque la relazione  $f(s_1 + s_2) = f(s_1)f(s_2)$ , da cui segue che  $f(s) = b^s$  e quindi  $I(s) = I_0 b^s$ , che è la Legge di Lambert-Beer. La monotonìa della funzione segue dal fatto che la luce trasmessa diminuisce al crescere dello spessore. Si tratta dunque di una funzione decrescente e quindi  $b < 1$ .

**Normy:-** Ma la formula che noi avevamo ricavato era un po' diversa!

**Apotema:** - Perché era espressa in termini dello spessore di dimezzamento, che avevamo indicato con  $\sigma$ . Lo spessore di dimezzamento è quello per cui  $I(\sigma) = \frac{I_0}{2}$ , cioè quello per il quale l'intensità della luce trasmessa è la metà di quella incidente.

Deve quindi essere  $I_0 b^\sigma = \frac{I_0}{2}$ , da cui  $b^\sigma = \frac{1}{2}$  e  $b = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = 2^{-\frac{1}{\sigma}}$ .

Ricaviamo così che  $I(s) = I_0 b^s = I_0 (2^{-\frac{1}{\sigma}})^s = I_0 2^{-\frac{s}{\sigma}}$ , che è la formula che avevamo trovato.

**Normy:-** Esatto!

**Apotema:-** Provate, per casa, a ripetere il procedimento per ritrovare la funzione  $R(t)$  che descrive il decadimento radioattivo!

**Scetty:-** Noi abbiamo trovato che la funzione che esprime l'intensità della luce trasmessa attraverso una lastra in termini dello spessore è una funzione esponenziale. Ma poi abbiamo dato per scontato che esiste uno spessore di dimezzamento! Chi ce lo assicura?

**Ovvy:-** Beh, io dico che, a forza di aumentare lo spessore, l'intensità finirà col diventare praticamente zero e quindi ci sarà uno spessore per il quale si dimezza esattamente!

**Apotema:-** Questa è una proprietà importantissima delle funzioni esponenziali. Ogni funzione esponenziale decrescente ammette una costante di dimezzamento e ogni funzione esponenziale crescente ammette una costante di raddoppiamento. In termini più precisi, per ogni funzione  $f(x) = ab^x$ , con  $0 < b < 1$ , esiste una costante  $T > 0$  tale che, per ogni numero  $x$ , si ha che  $f(x + T) = \frac{1}{2} f(x)$ .

**Normy:-** Non ho capito!

**Apotema:-** Da qualsiasi  $x$  io parta, se aumento  $x$  di  $T$ , allora il valore della funzione si dimezza. Se  $x$  è lo spessore di una lastra e  $f(x)$  l'intensità di luce trasmessa, allora  $T$  è lo spessore di dimezzamento. Se invece  $x$  è un istante di tempo e  $f(x)$  è la quantità di elemento radioattivo presente, allora  $T$  è il tempo di dimezzamento.

**Normy:-** Adesso ho capito, ma che cos'è che dobbiamo fare?

**Apotema:-** Dovete mostrare che ogni funzione esponenziale con base minore di 1 ammette una costante di dimezzamento. In modo del tutto analogo, dovete mostrare che ogni funzione esponenziale con base maggiore di 1 ammette una costante di raddoppiamento. Buon lavoro!



## LEZIONE XIII

**Dubby:-** A me sembra che la costante di raddoppiamento ce l'abbiano tutte le funzioni che crescono all'infinito!

**Apotema:-** Ti riferivi al compito che vi ho assegnato?

**Dubby:-** Sì, prof! Ho provato con la prima funzione che mi è venuta in mente: il quadrato!

**Apotema:-** E hai trovato la costante di raddoppiamento?

**Dubby:-** Certo!

**Apotema:-** Ne dubito fortemente...

**Dubby:-** Guardi, prof!

**Apotema:-** Calma, Dubby! Chi viene a correggere il compito?  
(Silenzio)

**Apotema:-** Ho capito, chiamo io. Vieni tu, Tacy?

(Tacy si alza in silenzio, arriva alla lavagna e comincia a scrivere)

**Gioky:-** Tacy è sottotitolato a pagina 777 di televideo!

**Apotema:-** Spiega un poco cosa stai scrivendo!

(Tacy si volta stupito verso Apotema, senza aprire bocca)

**Apotema:-** Vedo che hai scritto  $f(t) = \frac{R(t)}{R_0}$  e  $t = t_1 + t_2$ . Vuoi

farci partecipi dei tuoi ragionamenti?

(Tacy guarda Apotema con espressione interrogativa)

**Apotema:-** Devi commentare quello che scrivi!

**Tacy** (dopo alcuni interminabili secondi di silenzio): - Ho fatto come con la lastra...

**Apotema:-** Cercherò di tradurre la tua frase in italiano... In classe abbiamo visto come dedurre l'espressione della funzione che descrive l'attenuazione della luce attraverso una lastra di materiale semitrasparente usando il fatto che una funzione monotona per la quale l'effetto della somma è il prodotto degli effetti è una funzione esponenziale pura. Tacy sta ripetendo il procedimento nel caso del decadimento radioattivo. Se  $R(t)$  è la funzione che esprime la quantità di elemento al tempo  $t$ , allora

Tacy considera la funzione  $f(t) = \frac{R(t)}{R_0}$ , dove  $R_0$  è la quantità al

tempo zero, e cioè la funzione che esprime la percentuale di

elemento rimasto dopo un tempo  $t$ . Immagina poi di suddividere la durata  $t$  in due durate  $t_1$  e  $t_2$ . Ho tradotto bene, Tacy?

**Tacy** (dopo avere annuito con la testa):- Continuo?

**Apotema**:- Se non sei già arrivato alla fine...

(Tacy scrive ancora alcune formule)

**Apotema** (quasi rassegnato):- Continuerò a decifrare Tacy...

Dopo un tempo  $t_1$  rimane una percentuale  $f(t_1)$  di elemento, che rappresenta la quantità iniziale del secondo intervallo di tempo  $t_2$ . Alla fine del secondo intervallo di tempo resta quindi una percentuale  $f(t_2)$  della quantità di elemento che era rimasta alla fine del primo intervallo e quindi una percentuale  $f(t_1)f(t_2)$  della quantità iniziale. D'altra parte è trascorso complessivamente un tempo  $t_1+t_2$  e quindi è rimasta una percentuale  $f(t_1+t_2)$  della quantità iniziale. Deve allora essere  $f(t_1+t_2)=f(t_1)f(t_2)$  e quindi l'effetto della somma è il prodotto degli effetti!

(Tacy annuisce)

**Apotema**:- È monotona la funzione?

(Tacy, annuendo, fa segno col braccio che la funzione è decrescente)

**Apotema**:- Scommetto che sei l'unico in quest'aula che parla l'inglese come l'italiano!

**Gioky**:- Anche il cinese!

**Apotema**:- Dunque si tratta di una funzione esponenziale pura. Abbiamo quindi che  $f(t)=b^t$  e  $R(t)=R_0b^t$ . Vai pure al posto, Tacy.

(E Tacy si allontana in silenzio)

**Apotema**:- Se evidenziamo il tempo di dimezzamento  $T$ , cioè il tempo per il quale  $R(t+T)=\frac{1}{2}R(t)$  per qualsiasi  $t$ , allora

abbiamo che  $R_0b^{t+T}=\frac{1}{2}R_0b^t$ , cioè  $b^tb^T=\frac{1}{2}b^t$ , da cui  $b^T=\frac{1}{2}$  e

quindi  $b=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}}=2^{-\frac{1}{T}}$ . Sostituendo il valore di  $b$

nell'espressione della funzione ricaviamo che

$$R(t) = R_0 \left( 2^{-\frac{1}{T}} \right)^t = R_0 2^{-\frac{t}{T}}, \text{ che è la formula che ben conoscete.}$$

Ma veniamo all'importante problema che vi avevo assegnato e cioè quello di mostrare che ogni funzione esponenziale decrescente ha una costante di dimezzamento e ogni funzione esponenziale crescente una costante di raddoppiamento. Si tratta di una proprietà che caratterizza le funzioni esponenziali, anche se Dubby afferma di aver trovato una costante di raddoppiamento per la funzione quadrato...

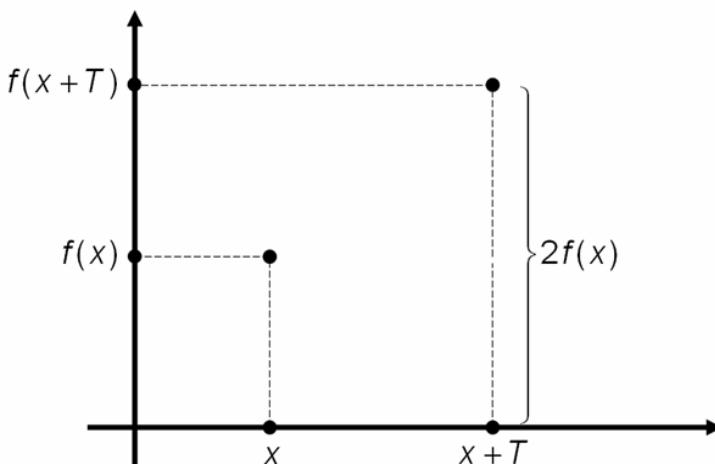
**Dubby:-** Posso venire io?

**Apotema:-** Puoi? Devi!

**Dubby:-** Ho provato per prima cosa a visualizzare il significato di costante di raddoppiamento...

**Apotema:-** Ottima idea.

**Dubby:-** Prendo un valore di  $x$  e mi chiedo di quanto mi devo spostare a destra perché la funzione raddoppi il suo valore.



**Apotema:-** Continua!

**Dubby:-** Di sicuro deve essere una funzione che cresce all'infinito! Ho così provato prima con la funzione quadrato. Per

semplicità ho preso  $x = 1$ , dove il quadrato vale 1, e mi sono chiesto per quale valore  $T > 0$  si ha che  $(1 + T)^2 = 2$ . Si ricava subito che deve essere  $1 + T = \sqrt{2}$  e quindi  $T = \sqrt{2} - 1$ !

**Apotema:-** Nessuna osservazione?

**Scetty:-** Non puoi decidere di prendere  $x = 1$ !

**Dubby:-** E perché mai? Ho solo scelto il numero più semplice! La costante di raddoppiamento è costante per definizione!

**Scetty:-** Quando esiste! Se prendevi  $x = 2$  ti veniva un valore diverso!

**Dubby:-** Dici? Allora... siccome  $2^2 = 4$ , cerco un  $T > 0$  in modo che  $(2 + T)^2 = 8$ . Viene  $2 + T = \sqrt{8}$  e quindi...  $T = \sqrt{8} - 2 = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$  ... Accidenti!

**Scetty:-** La costante di raddoppiamento è raddoppiata!

**Apotema:-** Mi sembra che la tua costante di raddoppiamento sia un po' troppo variabile per essere una costante! Se parti da 1, per raddoppiare il quadrato ti devi spostare di  $\sqrt{2} - 1$ , ma se parti da 2, ecco che per raddoppiare il quadrato devi spostarti a destra di  $2(\sqrt{2} - 1)$ ! Non esiste una costante di raddoppiamento per il quadrato! Affermare che una funzione ammette una costante di raddoppiamento, per usare la tua immagine geometrica, significa affermare che esiste un passo verso destra  $T$  tale che, da qualunque punto dell'asse delle ascisse si parta, facendo quel passo si arriva sempre in un punto in cui la funzione vale il doppio di prima! Cosa del tutto analoga vale per la costante di dimezzamento!

**Dubby:-** Mi sono sbagliato.

**Apotema:-** Succede. L'importante è che tu lo abbia capito.

**Dubby:-** E per una funzione esponenziale questa costante di raddoppiamento esiste sempre?

**Apotema:-** Quando la base è maggiore di 1. Ed è quello che ti avevo chiesto di dimostrare. Come è fatta in generale una funzione esponenziale?

**Dubby:-** In generale ha la forma  $f(x) = ab^x$ .

**Apotema:-** Supponi che sia  $b > 1$  e dimostra che esiste una costante di raddoppiamento.

**Dubby:-** Allora... cerco un  $T > 0$  per cui... se mi sposto di  $T$  la

funzione raddoppia... Ah! Deve essere  $f(x + T) = 2f(x)$ !

**Apotema:-** Già! Ma per tutti gli  $x$ !

**Dubby:-** Questo è l'errore che avevo fatto!

**Apotema:-** E adesso rimedia!

**Dubby:-** Siccome  $f(x + T) = ab^{x+T}$ , posso scrivere che deve essere  $ab^{x+T} = 2ab^x$ , da cui  $b^x b^T = 2b^x$ , e quindi...

**Apotema:-** Vedi qual è il miracolo? I termini con la  $x$  se ne vanno! In altre parole,  $T$  non dipende da  $x$ ! Per usare la tua immagine, il passo verso destra ha sempre la stessa lunghezza da qualsiasi punto io parta!

**Dubby:-** Abbiamo allora che  $b^T = 2$  e quindi  $T = \log_b 2$ !

**Apotema:-** Come vedete,  $T$  dipende solo da  $b$  e non da  $a$ . Del resto, moltiplicare per  $a$  non cambia il fatto che il valore della funzione raddoppi!

**Dubby:-** Faccio anche il caso della costante di dimezzamento?

**Scetty:-** Un momento! Non abbiamo usato l'ipotesi che sia  $b > 1$ ! Com'è possibile?

**Apotema:-** Ben detto, Scetty! Dove usiamo questa ipotesi?

**Dubby:-** Sembra proprio che sia superflua!

**Apotema:-** Dici? Secondo te la costante di raddoppiamento esiste anche se la funzione decresce?

**Dubby:-** No di certo!

**Apotema:-** E allora?

**Dubby:-** Eppure, dai calcoli, sembra che  $T$  esista sempre!

**Apotema:-** Anche nel caso del decadimento radioattivo?

**Dubby:-** Ovviamente no!

**Apotema:-** C'è se ti sposti a sinistra!

**Dubby:-** Ho capito! Deve essere positiva!

**Apotema:-** E quand'è che è positivo  $\log_b 2$ ?

**Dubby:-** Siccome  $2 > 1$ ... quando la base è maggiore di 1!

**Apotema:-** Hai visto che l'ipotesi non era superflua?

**Dubby:-** Adesso dimostro che se  $0 < b < 1$ , allora la funzione  $f(x) = ab^x$  ha una costante di dimezzamento.

**Apotema:-** Fermati un attimo! Dimmi un po', Dubby, secondo te una funzione esponenziale ammette anche una costante di triplicazione?

**Dubby:-** Beh... a occhio... se dopo due raddoppiamenti quadruplica... prima diventerà il triplo, no?

**Apotema:-** Attento, Dubby! Nessuno dubita che prima o poi triplichi! Il problema è se il passo necessario per triplicare non dipende dal punto di partenza! Errare è umano, perseverare è diabolico!

**Dubby:-** Allora... Cerco una costante positiva  $T_1$ ...

**Apotema:-** Chiamiamola  $T_3$ . E chiamiamo invece  $T_2$  la costante di raddoppiamento.

**Dubby:-** Ok, prof! Cerco una costante positiva  $T_3$  per la quale  $f(x + T_3) = 3f(x)$ ... per tutti gli  $x$ !

**Apotema:-** Vediamo se esiste!

**Dubby:-** Deve essere  $ab^{x+T_3} = 3ab^x$ , da cui... Prof, ma sono gli stessi calcoli di prima! Solo che questa volta verrà  $T_3 = \log_b 3$ !

**Apotema:-** Proprio così!

**Dubby:-** E ancora una volta  $T_3 > 0$ , perché  $b > 1$ !

**Normy:-** Allora esisterà anche la costante di quadruplicazione!

**Furby -** Ma questo lo sapevamo già! In fondo quadruplicare è raddoppiare due volte!

**Apotema:-** E quindi  $T_4 = 2T_2$ . E cosa mi dici, Dubby, di  $T_3$ ? In che rapporto sta con  $T_2$ ?

**Fuory:-** 1.5!

**Apotema:-** Sbagliato!

**Asy:-** Lo sapevo...

**Apotema:-** Dillo tu, Dubby!

**Dubby:-** Abbiamo appena trovato quanto valgono! Allora...

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{\log_b 3}{\log_b 2}, \text{ no?}$$

**Svelty:-** Che fa  $\log_2 3$ !

**Apotema:-** Vero, ma non molto utile. Conviene invece usare i logaritmi decimali, che trovate su tutte le calcolatrici, e scrivere

$$\text{che } \frac{T_3}{T_2} = \frac{\log 3}{\log 2}. \text{ Quanto fa, Svelty?}$$

**Svelty:-** 1.58!

**Apotema:-** Come vedete, la costante di triplicazione è più di una volta e mezzo quella di duplicazione! Il fatto intuitivo è che, se pensiamo alle costanti come a un tempo, una grandezza che cresce esponenzialmente cresce sempre più in fretta. Quindi,

nell'intervallo di tempo tra un raddoppiamento e una quadruplicazione, la funzione cresce più in fretta nella seconda metà dell'intervallo! Ecco allora che per triplicare le occorre un po' di più della metà del tempo tra un raddoppiamento e una quadruplicazione.

**Dubby:-** Ma allora, prof, esiste la costante di quintuplicazione, di se... come si dice?

**Sekky:-** Sestuplicazione!

**Apotema:-** Certamente. Per ogni numero naturale  $n$  esiste una costante  $T_n$  di ennuplicazione per la quale  $f(x + T_n) = nf(x)$  per tutti gli  $x$  e  $\frac{T_m}{T_n}$  è uguale a... Ditelo voi!

**(Molti):-**  $\frac{\log m}{\log n}$  !

**Apotema:-** E cosa mi dici, Dubby, riguardo alla costante di dimezzamento?

**Dubby:-** Direi che i calcoli sono sempre gli stessi, solo che questa volta  $T = \log_b \frac{1}{2}$ , che fa  $-\log_b 2$ . Questa volta non mi sbaglio! Per  $b > 1$  verrebbe negativa, ma per  $0 < b < 1$  viene positiva!

**Svelty:-** E poi ci sarà la costante di terzificazione!

**Apotema:-** Non esiste quella parola, Svelty!

**Svelty:-** La parola no, ma la costante sì!

**Apotema:-** Devo darti ragione!

**Dubby:-** Ma allora, prof, la legge del decadimento radioattivo può anche essere scritta come  $R(t) = R_0 3^{-\frac{t}{T_3}}$  !

**Apotema:-** Giusto, Dubby.

**Sekky:-** Scusi, professore, ma su Wikipedia la legge di Lambert-Beer sull'attenuazione luminosa l'ho vista con la base 10! E anche con una lettera "e" al posto della base!

**Scetty:-** Anche la legge del decadimento radioattivo, su Wikipedia, ha come base quella lettera "e"! Sta forse per una base qualsiasi? Esiste una base migliore di tutte?

**Apotema (un po' indeciso):-** Sì, esiste una base migliore di tutte: la base naturale.

**Scetty:-** Naturale?!

**Gioky:-** Senza conservanti né coloranti?

**Apotema:-** Sì, senza conservanti né coloranti!

**Sekky:-** Naturale come i logaritmi che sono sulla calcolatrice, professore?

**Apotema:-** Esattamente.

**Sogny:-** E che numero è mai, prof, quella base?

**Apotema:-** E' lo stesso numero che, come ha ricordato Sekky, è la base dei logaritmi detti naturali. Lo si indica con la lettera "e" ed è un numero irrazionale che vale circa 2.71828 .

**Sogny:-** Così brutto! Altro che coloranti e conservanti!

**Gioky:-** Sarà certamente cancerogeno!

**Dubby:-** Impossibile da ricordare!

**Apotema:-** No, molto facile: *"La scienza è vittoria di pensiero!"*

**Normy:-** Ma cosa sta dicendo, prof?

**Apotema:-** È una regola mnemonica. Una frase facile da tenere a mente, che ci consente di ricordare sei cifre del numero e. Le cifre sono semplicemente il numero di lettere di ogni parola: la (2) scienza (7) è (1) vittoria (8) di (2) pensiero (8).

**Normy:-** Bello!

**Apotema:-** Si può fare di meglio. Basta enfatizzare: *"La scienza è vittoria di pensiero! È vittoria di pensiero!"*

**Normy:-** Perché?

**Apotema:-** Perché il numero "e" con 10 cifre è 2.718281828!

**Normy:-** Ma allora è periodico!

**Apotema:-** No, non è periodico. È irrazionale. Ma quelle quattro cifre si ripetono! Anzi, una stima ancora migliore è la seguente:  
 $e = 2.71828182845904505922480411145$  -

**Fuory:-** Prof, lei è un genio! Come fa a ricordare tutta quella roba!

**Apotema:-** Sei tu che sei un credulone! Il gruppo di cifre 459045 è esatto e non riesco a dimenticarlo, ma tutte le altre sono inventate! 222480 fu il mio primo numero di telefono e 059 il prefisso per Modena! Mentre 411145 era la targa della mia mitica Fiat 500 color becco d'oca!

**Fuory:-** Che delusione...

**Apotema:-** Bene, vedremo anche il numero "e", detto *Numero di Nepero*. Ma non certo adesso che l'ora sta per finire! Forse non basterà una lezione... Continuiamo invece il nostro percorso e vediamo di caratterizzare in termini di causa/effetto le funzioni logaritmiche pure. Già qualcuno, la lezione scorsa, ha

indovinato che per queste funzioni l'effetto del prodotto è la somma degli effetti. In termini più precisi:  $f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ , per ogni coppia di numeri positivi  $x_1$  e  $x_2$ . Per inciso, è stata proprio questa proprietà ad attirare l'attenzione sulle funzioni logaritmiche. Fino alla Seconda Guerra Mondiale, i logaritmi decimali sono stati sostanzialmente lo strumento più potente di calcolo a disposizione degli ingegneri e degli scienziati. È difficile esagerare l'importanza che hanno avuto i logaritmi nello sviluppo della nostra civiltà. Forse nessuno ha mai provato a stilare una lista di tutte le cose che non avrebbero mai potuto essere realizzate o calcolate senza i logaritmi! E il signor Nepero è stato uno dei pionieri in questo campo.

**Sekky:-** Scusi, professore, ma non ho proprio capito quello che ha detto!

**Apotema:-** Non te ne ho dato la possibilità! Sarà l'argomento della prossima lezione. Come compito per casa vi lascio da dimostrare che le funzioni logaritmiche pure godono della proprietà che l'effetto del prodotto è il prodotto degli effetti e che questa proprietà, unitamente alla monotonia, le caratterizza completamente.

Driiiiiiiiiiiiiiiiiiiiiin

**Apotema:-** A domani!

**Asy:-** La scienza è vittoria di pensiero! È vittoria di pensiero!



## LEZIONE XIV

**Apotema:-** Vieni tu, Bronty, a correggere il compito?

**Bronty** (brontolando):- Devo proprio venire?

**Apotema:-** Sì!

**Bronty:-** Dovevamo vedere che per una funzione logaritmica pura l'effetto del prodotto è la somma degli effetti.

**Apotema:-** E viceversa!

**Bronty:-** E viceversa.

**Apotema:-** Puoi cominciare.

**Bronty:-** Per la prima parte non c'era niente di nuovo, perché se  $f(x) = \log_b x$ , sappiamo già che il logaritmo di un prodotto è la somma dei logaritmi, e quindi

$$f(x_1 x_2) = \log_b x_1 x_2 = \log_b x_1 + \log_b x_2 = f(x_1) + f(x_2).$$

**Apotema:-** Bene. E adesso cosa devi fare vedere?

**Bronty** (brontolando):- Devo fare vedere che se ho una funzione che gode della proprietà che  $f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2)$  per tutte le coppie di numeri  $x_1$  e  $x_2$  ...

**Apotema:-** Positivi!

**Bronty** (brontolando):- ... per tutte le coppie di numeri positivi  $x_1$  e  $x_2$ , allora si tratta di una funzione logaritmica pura.

**Scetty:-** Abbiamo detto che deve anche essere monotona!

**Bronty:-** Monotona! Non mi hai dato il tempo di dirlo!

**Apotema:-** Come hai proceduto?

**Bronty:-** Come abbiamo fatto le altre volte! In  $x$  la funzione vale  $f(x)$  e se moltiplichiamo  $x$  per  $q$  abbiamo che  $f(xq) = f(x) + f(q)$ , cioè se moltiplichiamo per una costante  $q$  l'ingresso, allora all'uscita viene sommata la costante  $f(q)$ . Le progressioni geometriche vengono perciò mandate in progressioni aritmetiche. Se poi è monotona, allora è una funzione logaritmica.

**Apotema:-** Pura! Come fai a far vedere che è pura?

**Bronty:-** Devo far vedere che  $f(1) = 0$ . -

**Apotema:-** E come si fa?

**Bronty:-** Ormai è vecchiaia! Siccome  $1 \cdot 1 \dots$

**Gioky:-** Non fa male a nessuno!

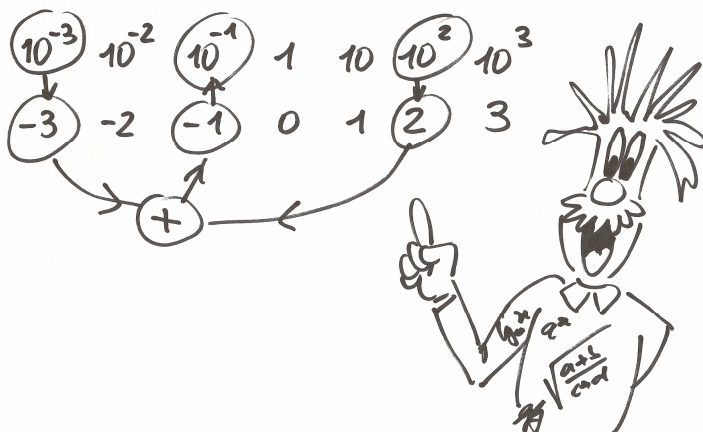
**Bronty:-** Siccome  $1 \cdot 1 = 1$ , allora  $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$  e quindi  $f(1) = 0$ .

**Apotema:-** Bravo Bronty! Vai pure al posto.

**Sekky:-** Scusi, professore. La volta scorsa lei ci ha detto che questa proprietà è stata quella per la quale i logaritmi sono stati studiati e che i logaritmi hanno avuto un ruolo di primo piano nello sviluppo della tecnica e della scienza. In che senso?

**Apotema:-** Anche se appartenete a una generazione che non è stata addestrata al calcolo mentale, sapete tutti che bastano pochi secondi per calcolare la somma di due numeri con anche 10 o 20 cifre, vero? Bene, se invece della somma, vi chiedessi di calcolarne il prodotto, ecco che la cosa diventerebbe molto più impegnativa! Non vi dico per la divisione o, peggio, per l'elevamento a potenza!

**Sekky:-** Non c'è dubbio, professore, ma ancora non capisco dove vuole arrivare!



**Apotema:-** A mostrarvi l'idea geniale che ha portato ai logaritmi. Consideriamo la progressione geometrica delle potenze di 10 a esponente intero e associamole la progressione aritmetica degli esponenti, cioè le progressioni che definiscono la funzione logaritmica in base 10:

...,  $10^{-3}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-1}$ , 1, 10,  $10^2$ ,  $10^3$ , ...

..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

Supponete ora di voler moltiplicare 0.001 per 100.

**Svelty:-** Facile! 0.1!

**Apotema:-** Facile per ora! Supponiamo, dicevo, di voler moltiplicare 0.001 per 100. Ora  $0.001 = 10^{-3}$  e  $100 = 10^2$  per cui  $0.001 \times 100 = 10^{-3} \times 10^2 = 10^{-3+2} = 10^{-1}$ . In altre parole, volendo moltiplicare 0.001 per 100, passiamo ai loro logaritmi, che sono -3 e 2, li sommiamo, ottenendo -1, e il risultato è dato dalla potenza di 10 che ha quell'esponente, cioè  $10^{-1} = 0.1$ !

**Svelty:-** - Mi sembra un po' complicato, no? Si faceva prima a mente! -

**Apotema:-** Supponi allora di voler calcolare  $34.23 \times 157.2$  ! Riesci a farlo a mente?

**Svelty:-** Temo di no...

**Apotema:-** Supponiamo che qualcuno mi dica quanto valgono i logaritmi decimali di 34.23 e di 157.2.

**Svelty:-** 1.534407 e 2.196453 !

**Apotema:-** Questo significa che  $34.23 = 10^{1.534407}$  e  $157.2 = 10^{2.196453}$ .

Ora  $34.23 \times 157.2 = 10^{1.534407+2.196453} = 10^{3.730860}$ , cioè il logaritmo del prodotto di  $34.23 \times 157.2$  è 3.730860, che è la somma dei logaritmi dei due numeri. Se adesso qualcuno mi sa dire quanto fa  $10^{3.730860}$  con 4 cifre significative...

**Svelty:-** 5381!

**Apotema:-** Ecco che ho calcolato il prodotto!

**Svelty:-** Sarebbe venuto 5380.956!

**Apotema:-** Ricapitoliamo. Consideriamo le due progressioni, quella delle potenze di 10 e quella degli esponenti. Per calcolare il prodotto di due termini della prima progressione, operazione complessa, consideriamo i termini corrispondenti della seconda progressione e ne facciamo la somma, operazione semplice! Cerchiamo il valore della somma tra i termini della seconda progressione e quindi il termine della prima progressione che gli corrisponde è il prodotto che volevamo calcolare. In questo

modo abbiamo calcolato un prodotto mediante una semplice somma! In altre parole, per calcolare il prodotto di due numeri positivi, si trovano i logaritmi dei due fattori e si sommano e il prodotto cercato è il numero che ha per logaritmo la somma trovata.

**Dubby:-** E se i numeri non sono positivi?

**Apotema:-** Ti pare un problema? Quanto fa  $(-34.23) \times 157.2$ ?

**Dubby:-** Che stupido! Basta usare la regola dei segni e saper calcolare il prodotto di numeri positivi!

**Apotema:-** Hai dato tu stesso la risposta!

**Sekky:-** Quindi, professore, i logaritmi sono stati introdotti per fare le moltiplicazioni come fossero addizioni?

**Apotema:-** Esattamente. E non solo le moltiplicazioni. Il logaritmo di un quoziente è la differenza dei logaritmi. In questo modo le divisioni diventano sottrazioni. Se poi ricordate che il logaritmo di una potenza è l'esponente per il logaritmo della base, ecco che i logaritmi trasformano elevamenti a potenza in prodotti, i quali possono a loro volta essere trasformati in somme. La chiave di tutto ciò è nella caratteristica delle funzioni logaritmiche pure che possiamo riassumere dicendo che l'effetto del prodotto è la somma degli effetti:  $f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ .

**Normy:-** Scusi, prof, ma Svelty ha usato la calcolatrice per trovare i logaritmi! Tanto valeva calcolare il prodotto!

**Apotema:-** Senza dubbio. Se si ha la calcolatrice si calcola il prodotto. Ma in un passato non molto remoto le calcolatrici non c'erano.

**Normy:-** E allora come si calcolavano i logaritmi?

**Apotema:-** Con l'algoritmo dell'inserimento di medi. A mano!

**Normy:-** A mano?! Ma non si faceva prima a calcolare il prodotto?

**Apotema:-** Puoi esserne certo! Ma ogni volta c'è da calcolare un prodotto diverso, mentre se ho fatto la fatica di calcolare i logaritmi di tanti numeri una volta per tutte, ecco che le operazioni diventano veloci.

**Scetty:-** Ma di quali numeri calcolo una volta per tutte i logaritmi? Di 0.00123? Di 256.8? C'è una caterva di numeri possibili!

**Apotema:-** Vi ricordo una proprietà che abbiamo già visto. Quanto fa  $\log 123$ ?

**Svelty:-** 2.089905 !

**Apotema:-** E  $\log 1.23$  ? -

**Geny:-** 0.089905 !

**Svelty:-** Mi hai bruciato!

**Apotema:-** Perché non ha usato la calcolatrice!

**Geny:-** Se un numero lo moltiplico per 0.01 il suo logaritmo cala di 2!

**Apotema:-** Esatto.  $\log(a \cdot 10^n) = \log a + \log 10^n = \log a + n$ ! In altre parole, due numeri con le stesse cifre hanno la stessa parte decimale del logaritmo, detta mantissa, e differiscono solo per la parte intera, detta caratteristica. Se decido di calcolare con 4 cifre significative mi basta allora calcolare i logaritmi decimali dei numeri interi da 1000 e 9999. Anzi, solo la parte decimale!

**Normy:-** Ho quasi capito...

**Apotema:-** Supponiamo che qualcuno ci abbia fatto la cortesia di calcolare le parti decimali, mantisse, dei logaritmi dei numeri da 1000 a 9999 e di averle scritte in un libro. Supponiamo quindi di voler calcolare  $34.23 \times 157.2$ . Per sapere il logaritmo di 34.23, cerchiamo la mantissa di 3423, che è 534407. Siccome il numero è sull'ordine delle decine ed è quindi compreso tra  $10^1$  e  $10^2$ , la parte intera del suo logaritmo, cioè la caratteristica, vale 1. Ne segue che  $\log 34.23 = 1.534407$ .

**Svelty:-** In generale viene il numero di cifre della parte intera meno uno!

**Apotema:-** Se è maggiore di uno! Quanto vale la caratteristica del logaritmo di 0.0003423?

**Svelty:-** Vale -3! Perché il numero è sull'ordine dei decimillesimi ed è compreso tra  $10^{-4}$  e  $10^{-3}$ . Il suo logaritmo è allora meno tre virgola qualcosa!

**Geny:-** Vale -4! Perché meno tre e qualcosa è meno quattro più qualcosa di positivo! Il logaritmo di 0.0003423 è  $-4 + 0.534407 = -3.465593$  !

**Normy:-** La calcolatrice conferma!

**Geny:-** Se il numero è minore di 1, la caratteristica è il numero di zeri iniziali, presa col segno meno!

**Apotema:-** Proprio così, Geny. Ma torniamo al nostro prodotto. Per calcolare  $\log 157.2$  cerchiamo la mantissa di 1572, che è

196453. La caratteristica è 2, per la regola di Svelty, e quindi  $\log 157.2 = 2.196453$ . Adesso sommiamo rapidamente a mano i due numeri, ottenendo 3.730860 e andiamo a cercare quale numero ha mantissa 730860. Troviamo che la mantissa più vicina è quella del numero 5381 e siccome il risultato ha caratteristica 3, deve trattarsi di un numero che ha 4 cifre intere e quindi proprio 5381! Una volta imparato il trucco si può procedere speditamente a fare prodotto, quozienti e potenze in pochi secondi! Calcoli che avrebbero richiesto minuti o addirittura ore!

**Scetty:-** Questo significa che se voglio calcolare con 4 cifre significative devo avere a disposizione le mantisse di 9000 numeri! E se voglio 5 cifre significative devo calcolare le mantisse di 90000 numeri!

**Apotema:-** Vero, Scetty, ma non c'è bisogno di calcolare le mantisse di tutti i numeri!

**Genny:-** Bastano quelle dei numeri primi! Perché se il numero si scompone in fattori primi il suo logaritmo è la somma dei logaritmi dei suoi fattori!

**Apotema:-** Bravo!

**Scetty:-** Saranno pur sempre un migliaio di numeri!

**Apotema:-** Non ci sono dubbi! Ma è stato proprio il calcolo paziente e ingegnoso di quei numeri che ha dato un formidabile slancio alla scienza e alla tecnica! Un po' come il computer nel nostro tempo!

**Sekky:-** Ma davvero sono stati calcolati con l'algoritmo dicotomico? -

**Apotema:-** Davvero! Ma in una forma più economica. Ricordate che si tratta di infittire le due progressioni inserendo dei medi geometrici nella progressione delle potenze di 10 e dei medi aritmetici in quella degli esponenti. L'idea è che se voglio inserire un medio tra 1 e 10 devo calcolare  $\sqrt{10}$ , ma poi non c'è bisogno di inserire tutti gli altri medi calcolando ogni volta una radice. Basta moltiplicare per 10! Il medio geometrico tra 10 e 100 è  $\sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$ . E così via. Quanto fa  $\sqrt{10}$ ?

**Svelty:-** 3.162278!

**Apotema:-** Bene, il medio tra 1 e 10 è 3.162278 e quindi quello tra 10 e 100 è 31.62278, quello tra 100 e 1000 è 316,2278 ecc.

A questo punto si tratta di inserire un medio tra 1 e  $\sqrt{10}$ , che è  $\sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt[4]{10}$ , e poi un medio tra 1 e  $\sqrt[4]{10}$ , che è  $\sqrt[8]{10}$ . Ormai dovrebbe essere chiaro, no? Il primo passo è quello di calcolare le radici quadrate successive di 10. Si tratta di un calcolo che una persona può tranquillamente svolgere in una giornata. Più lungo sarà il calcolo effettivo di un logaritmo. Ci saranno delle divisioni e delle moltiplicazioni da fare e ... tutto a mano!

**Sekky:** Possiamo provare a calcolare un logaritmo?

**Apotema:-** Mi sembra una buona idea. Anche perché lungo la strada troveremo il numero di Nepero.

**Normy:-** Quello della scienza che è vittoria di pensiero?

**Apotema:-** Proprio quello. Per ora ci limitiamo a compilare una tabella con le radici quadrate successive di 10 che, ovviamente, calcoliamo con la calcolatrice!

(Apotema e i ragazzi calcolano in poco tempo una tabella di numeri)

**Apotema:-** Bene. Abbiamo calcolato le radici quadrate, quarte, ottave ... di 10 e cioè le potenze di esponente 1/2, 1/4, 1/8,... Siamo adesso pronti per cominciare il calcolo di un logaritmo. Di quale numero volete calcolarlo?

**Sogny:-** Di 73!

| x      |         | $10^x$  |
|--------|---------|---------|
| 1/2    | 0.50000 | 3.16228 |
| 1/4    | 0.25000 | 1.77828 |
| 1/8    | 0.12500 | 1.33352 |
| 1/16   | 0.06250 | 1.15478 |
| 1/32   | 0.03125 | 1.07461 |
| 1/64   | 0.01563 | 1.03663 |
| 1/128  | 0.00781 | 1.01815 |
| 1/256  | 0.00391 | 1.00904 |
| 1/512  | 0.00195 | 1.00451 |
| 1/1024 | 0.00098 | 1.00225 |

**Apotema:-** Vada per  $\log 73$ . Cominciamo con l'osservare che la mantissa di 73 è la stessa di 7.3 e che possiamo quindi sempre ricondurci al calcolo di logaritmi di numeri compresi tra 1 e 10. Sia ben chiaro che le moltiplicazioni e le divisioni che seguono

le faremo con la calcolatrice, ma che è possibile calcolarle a mano e che i primi compilatori di tavole logaritmiche hanno fatto questi calcoli a mano.

**Asy:-** Che pazzi!

**Apotema:-** Cominciamo col dividere 7.3 per la prima radice che gli è inferiore, in questo caso  $3.16228 = 10^{1/2}$ . Controllate i miei

calcoli! Allora...  $\frac{7.3}{3.16228} = 2.30846$ . Ripetiamo la stessa cosa

col risultato, che andiamo quindi a dividere per  $1.77828 = 10^{1/4}$ .

Abbiamo che...  $\frac{2.30846}{1.77828} = 1.29814$ . Notate che non può mai

accadere che si debba dividere due volte per lo stesso numero!

**Geny:-** Altrimenti si sarebbe potuto dividere per il suo quadrato, che era il numero precedente!

**Apotema:-** Giusto, Geny. Questa volta saltiamo un numero e dividiamo per  $1.15478 = 10^{1/16}$ . Dunque...  $\frac{1.29814}{1.15478} = 1.12414$ .

Continuando... dividiamo per  $1.07461 = 10^{1/32}$  ... e otteniamo che  $\frac{1.12414}{1.07461} = 1.04609$ . Dividiamo per  $1.03663 = 10^{1/64}$  e ricaviamo

che...  $\frac{1.04609}{1.03663} = 1.00913$ . Saltiamo un numero e dividiamo per

$1.00904 = 10^{1/256}$  ...  $\frac{1.00913}{1.00904} = 1.00009$ , che è più piccolo di

tutte le radici, e ci fermiamo. Possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} 7.3 &= 10^{\frac{1}{2}} (2.30846) = 10^{\frac{1}{2}} 10^{\frac{1}{4}} (1.29814) = 10^{\frac{1}{2}} 10^{\frac{1}{4}} 10^{\frac{1}{16}} (1.12414) = \\ &= 10^{\frac{1}{2}} 10^{\frac{1}{4}} 10^{\frac{1}{16}} 10^{\frac{1}{32}} (1.04609) = 10^{\frac{1}{2}} 10^{\frac{1}{4}} 10^{\frac{1}{16}} 10^{\frac{1}{32}} 10^{\frac{1}{64}} (1.00913) = \\ &= 10^{\frac{1}{2}} 10^{\frac{1}{4}} 10^{\frac{1}{16}} 10^{\frac{1}{32}} 10^{\frac{1}{64}} 10^{\frac{1}{256}} (1.00009). \end{aligned}$$

Ho scritto tutti questi passaggi, ma è chiaro che il numero di cui vogliamo calcolare il logaritmo viene espresso come prodotto di tutte le potenze di 10 per cui l'abbiamo diviso, moltiplicato per l'ultimo quoziente ottenuto. L'ultimo fattore è sempre molto vicino a 1 e, in prima approssimazione, possiamo provare a

trascurarlo. Risulta allora che

$$7.3 \cong 10^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}}$$

e quindi che

$$\log 7.3 \cong \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}.$$

Ancora una volta vediamo che è inutile scrivere tutti questi passaggi, che hanno il solo scopo di chiarire il procedimento. Una volta fatte le divisioni, basta sommare gli esponenti delle potenze di 10 per cui si è diviso e il risultato ottenuto è una stima del logaritmo cercato! Nel nostro caso, sommando gli esponenti in forma decimale, otteniamo che

$$\log 7.3 \cong 0.86328$$

e quindi che  $\log 73 = 1.86328$ .

**Svelty:-** La calcolatrice mi dà 1.86332!

**Sekky:-** Formidabile!

**Apotema:-** Si può fare di meglio! E nel fare di meglio incontreremo il mitico numero di Nepero!

**Normy:-** Davvero?

**Apotema:-** Certo! Ma... ormai la lezione è finita. Per la prossima volta provate a calcolare  $\log 2$ . Buon lavoro!



## LEZIONE XV

**Apotema:-** Chi ha calcolato  $\log 2$ ?

**Normy:-** Posso venire io, prof?

**Apotema:-** Certo, Normy. Per fortuna mi sono ricordato di dire di non cancellare la tabella!

| x      |         | $10^x$  |
|--------|---------|---------|
| 1/2    | 0.50000 | 3.16228 |
| 1/4    | 0.25000 | 1.77828 |
| 1/8    | 0.12500 | 1.33352 |
| 1/16   | 0.06250 | 1.15478 |
| 1/32   | 0.03125 | 1.07461 |
| 1/64   | 0.01563 | 1.03663 |
| 1/128  | 0.00781 | 1.01815 |
| 1/256  | 0.00391 | 1.00904 |
| 1/512  | 0.00195 | 1.00451 |
| 1/1024 | 0.00098 | 1.00225 |

**Normy:-** Siccome 2 è compreso tra 1 e 10, possiamo già procedere con le divisioni per le radici di 10. Cerco la prima radice minore di 2, che è  $1.77828 = 10^{1/4}$  e trovo che  $\frac{2}{1.77828} = 1.12468$ . Divido adesso per  $1.07461 = 10^{1/32}$  e

ottengo che  $\frac{1.12468}{1.07461} = 1.04659$ . Divido poi per  $1.03663 = 10^{1/64}$

e trovo quindi che  $\frac{1.04659}{1.03663} = 1.00961$ . Adesso divido per

$1.00904 = 10^{1/256}$  e mi risulta che  $\frac{1.00961}{1.00904} = 1.00056$ . Siccome

non ci sono radici più piccole, mi fermo e trovo che  $\log 2 \cong \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} = 0.30079$ . La calcolatrice mi dà

$\log 2 = 0.30103$  e questa volta il risultato è meno preciso del calcolo fatto in classe per  $\log 73$ .

**Apotema:-** Bravo Normy! Non ci resta che cercare di migliorare l'algoritmo. Un modo sarebbe certamente quello di prolungare la tavola calcolando radici successive, ma noi scegliamo un'altra strada: quella di non approssimare a 1 il fattore residuo, ma di esprimerlo come potenza di 10.

**Normy:-** Non mi è chiaro...

**Apotema:-** Coi tuoi calcoli, hai ottenuto il fattore residuo 1.00056, che hai trascurato approssimandolo a 1. Se tu riuscissi a esprimere anche quel fattore come potenza di 10, allora potresti sommare l'esponente a quelli precedenti e ottenere un valore migliore per  $\log 2$ .

**Normy:-** E come si fa senza già conoscere i logaritmi?

**Apotema:-** È proprio quello che voglio mostrarvi. Osservate attentamente la colonna della tabella coi valori delle radici successive di 10. Riuscite a indovinare come saranno le righe successive?

**Scopry:-** All'inizio c'è un po' di disordine, ma nelle ultime righe la parte decimale si dimezza quasi esattamente ogni volta!

**Apotema:-** Bravo Scopry! E cos'altro si dimezza?

**Svelty:-** L'esponente! Quello si dimezza esattamente ogni volta!

**Geny:-** Il rapporto tra la parte decimale e l'esponente tende ad assestarsi!

**Apotema:-** Allora quale quantità proviamo a calcolare in un'altra colonna?

**Geny:-** La parte decimale, tranne che per i primi numeri, è

$10^x - 1$ , quindi andiamo a calcolare il rapporto  $\frac{10^x - 1}{x}$ !

**Apotema:-** Ottimo, Geny! Dettami tu, Svelty, i numeri. E voi controllate!

(Apotema compila così un'altra colonna della tabella)

**Scopry:-** Il rapporto sembra assestarsi su un valore che è circa 2.30, ma le righe sono troppo poche per trovare un valore a 5 decimali di questo rapporto!

**Apotema:-** Possiamo tentare di indovinare che cosa succede.

**Normy:-** Come?

**Apotema:-** Avrete notato che i valori decrescono. Cerchiamo di vedere con che velocità, in modo da indovinare i primi 5 decimali del numero sul quale sembra assestarsi il rapporto.

**Normy:-** E come facciamo a misurare la velocità con cui

decregono?

| $x$    |         | $10^x$  | $\frac{10^x - 1}{x}$ | $\Delta$ |
|--------|---------|---------|----------------------|----------|
| 1/2    | 0.50000 | 3.16228 | 4.32546              |          |
| 1/4    | 0.25000 | 1.77828 | 3.11312              | 1.21234  |
| 1/8    | 0.12500 | 1.33352 | 2.66817              | 0.44495  |
| 1/16   | 0.06250 | 1.15478 | 2.47651              | 0.19166  |
| 1/32   | 0.03125 | 1.07461 | 2.38745              | 0.08906  |
| 1/64   | 0.01563 | 1.03663 | 2.34451              | 0.04294  |
| 1/128  | 0.00781 | 1.01815 | 2.32342              | 0.02109  |
| 1/256  | 0.00391 | 1.00904 | 2.31297              | 0.01045  |
| 1/512  | 0.00195 | 1.00451 | 2.30777              | 0.00520  |
| 1/1024 | 0.00098 | 1.00225 | 2.30518              | 0.00259  |

**Svelty:-** Calcoliamo le differenze!

**Apotema:-** Dettami le differenze tra un termine e il successivo, Svelty.

(Apotema aggiunge così un'altra colonna alla tabella)

**Scopry:-** Ho capito! Le differenze tendono a dimezzarsi ogni volta! Possiamo così indovinare il risultato!

**Apotema:-** La differenza successiva sarà 130, poi 65, poi 33, 16, 8, 4, 2, 1.

**Scopry:-** Quindi calerà ancora della somma di tutti quei numeri!

**Svelty:-** La somma  $130 + 65 + 33 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$  fa 259!

**Apotema:-** Allora il numero cercato è  $2.30518 - 0.00259$  !

**Svelty:-** Che fa 2.30259 !

**Apotema:-** Questo significa che quando  $x$  è molto piccolo si ha

che  $\frac{10^x - 1}{x} = 2.30259$  o, che è la stessa cosa,

$$10^x = 1 + 2.30259x.$$

**Geny:-** Quindi il fattore 1.00056 che abbiamo trascurato, possiamo esprimerlo come  $10^x$ , dove  $x$  è certamente piccolo. Molto più piccolo di  $1/1024$  !

**Apotema:-** Vuoi mostrarci tu come fare? Vieni alla lavagna!

**Geny:-** Cerco per quale  $x$  si ha che  $10^x = 0.00056$ , cioè cerco per quale  $x$  si ha che  $1 + 2.30259x = 1.00056$  Deve essere

quindi  $2.30259x = 0.00056$ , per cui  $x = \frac{0.00056}{2.30259} = 0.00024$ . Ma

allora  $1.00056 = 10^{0.00024}$  e questo fattore dà un contributo 0.00024 alla somma degli esponenti e quindi a  $\log 2$ . Abbiamo allora che  $\log 2 = 0.30079 + 0.00024 = 0.30103$ .

**Normy:-** Il valore della calcolatrice! Fantastico!

**Dubby:-** Proviamo a fare la correzione anche per  $\log 73$ !

**Geny:-** In quel caso il fattore residuo qual era?

**Normy:-** Era 1.00009!

**Geny:-** Allora questa volta  $x = \frac{0.00009}{2.30259} = 0.00004$ .

**Normy:-** Avevamo ottenuto per  $\log 73$  il valore 1.86328 e quindi adesso possiamo dire che  $\log 73 = 1.86332$ .

**Dubby:-** Anche questa volta il valore della calcolatrice!

**Apotema:-** È chiaro il procedimento? Si fanno le divisioni e si sommano gli esponenti corrispondenti alle potenze di 10 per cui si è diviso. Si ottiene quindi un fattore residuo e si somma una correzione pari alla parte decimale del residuo diviso il numero magico 2.30259.

**Scetty:-** Ma non è il numero di Nepero! Il numero di Nepero è 2.71828!

**Apotema:-** Già!

**Normy:-** Ma ci aveva detto che avremmo incontrato il Numero di Nepero!

**Apotema:-** Il viaggio non è ancora finito! Abbiamo imparato che quando  $x$  è molto piccolo si ha che  $10^x = 1 + 2.30259x$ . Esiste una base  $b$  per cui vale semplicemente l'uguaglianza  $b^x = 1 + x$ ? Per il calcolo dei logaritmi in quella base si potrebbe risparmiare la divisione finale. Sarebbe in un certo senso la base più bella di tutte!

**Normy:-** La base naturale! Allora succede quando  $b = 2.71828$ , vero?

**Apotema:-** Ormai sapete che l'assassino è il maggiordomo. Ma vediamo di provarlo. Provaci tu, Geny, che sei alla lavagna!

**Geny:-** Allora... cerco una base  $b$  per la quale, quando  $x$  è molto piccolo,  $b^x = 1 + x$  ... e so già che  $10^x = 1 + 2.30259x$  ... Come prima cosa provo a esprimere  $b$  come  $10^c$ ! Pongo allora

$b = 10^c$  e cerco di determinare  $c$  usando le uguaglianze precedenti. Se  $x$  è molto piccolo, allora deve essere  $b^x = 1 + x$  e quindi  $(10^c)^x = 1 + x$ , cioè  $10^{cx} = 1 + x$ . D'altra parte, se  $x$  è molto piccolo, allora anche  $cx$  sarà molto piccolo e dovrà essere  $10^{cx} = 1 + 2.30259cx$ . Morale della favola, deve essere  $1 + 2.30259cx = 1 + x$ , da cui  $2.30259cx = x$  e quindi  $c = \frac{1}{2.30259}$  ... che fa 0.43429. La base naturale è allora  $10^{0.43429}$ !

**Svelty:-** Viene 2.71828! Incredibile!

**Scetty:-** Ma come la si può calcolare a mano?

**Geny:-** A mano sappiamo calcolare le radici quadrate successive e quindi possiamo esprimere 0.43429 come somma di mezzi, quarti, ecc...

**Normy:-** Come?

**Geny:-** Sottraggo i numeri della prima colonna della tabella a partire dal più grande possibile! Allora...

$$0.43429 - 0.25 = 0.18429 \quad \dots \quad 0.18429 - 0.125 = 0.05929 \quad \dots$$

$$0.05929 - 0.03125 = 0.02804 \quad \dots \quad 0.02804 - 0.01563 = 0.01241 \quad \dots$$

$$0.01241 - 0.00781 = 0.00460 \quad \dots \quad 0.00460 - 0.00391 = 0.00069.$$

Posso concludere che

$$0.43429 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + 0.00069.$$

$$\text{Ma allora } 10^{0.43429} = 10^{\frac{1}{4}} 10^{\frac{1}{8}} 10^{\frac{1}{32}} 10^{\frac{1}{64}} 10^{\frac{1}{128}} 10^{\frac{1}{256}} 10^{0.00069}.$$

A questo punto i fattori li conosciamo già tutti tranne l'ultimo. Se troviamo anche quello ci basta moltiplicarli! -

**Scetty:-** A mano!

**Geny:-** Non certo io! Userò la calcolatrice!

**Apotema:-** A noi interessa vedere come sia stato possibile fare quei calcoli a mano, non rifarli a mano!

**Geny:-** Ora  $10^{0.00069} = 1 + (2.30259)(0.00069) = 1.00159$ , per cui non ci resta che fare il prodotto:

$$1.77828 \times 1.33352 \times 1.07461 \times 1.03663 \times 1.01815 \times 1.00904 \times 1.00159, \text{ che fa } \dots 2.71822!$$

**Normy:-** Peccato che l'ultima cifra sia sbagliata!

**Apotema:-** Era quasi inevitabile. Ma siamo comunque arrivati a scoprire il numero di Nepero, quel numero definito dalla proprietà che, per piccoli valori di  $x$ , sia  $e^x \cong 1 + x$ .

**Dubby:-** Quindi possiamo dire che  $e \cong (1 + x)^{\frac{1}{x}}$  quando  $x$  è molto piccolo, no?

**Apotema:-** Per ora è una buona definizione.

**Dubby:-** Ma se noi usiamo la calcolatrice per calcolare i logaritmi, che cosa ce ne facciamo del numero di Nepero?

**Apotema:-** Sarebbe un po' come chiedere a che cosa servono i logaritmi se noi abbiamo la calcolatrice per fare prodotti, quozienti e potenze. I logaritmi, abbiamo visto, ci consentono di descrivere e risolvere una varietà di problemi che va ben oltre al problema per il quale furono concepiti. Altrettanto, il numero di Nepero scaturisce da una grande varietà di problemi e non solo nel calcolo delle tavole dei logaritmi.

**Normy:-** Ne possiamo vedere qualcuno?

**Apotema:-** Certamente. Comincio col problema forse più famoso: quella della capitalizzazione composta. Immaginate di investire 1 euro al tasso di interesse del 100% annuo per un anno. Dopo un anno ritirate il vostro euro più un euro di interesse e così il vostro nuovo capitale è di  $1 + 1 = 2$  euro. C'è un modo però per migliorare il vostro investimento: dopo sei mesi andate a ritirare il vostro euro più mezzo euro di interesse e tornate a investire il tutto per altri sei mesi! Avete dunque investito  $1 + \frac{1}{2}$  euro per metà anno e avrete come interesse

metà del capitale investito e cioè  $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right)$ . In totale, dopo un anno, avrete la cifra di

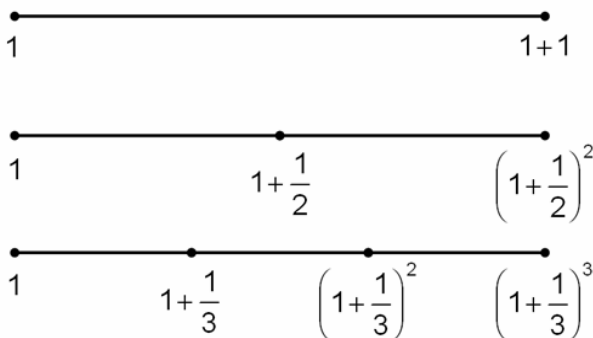
$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \text{ euro,}$$

che fanno  $1.5^2 = 2.25$  euro! -

**Sogny:-** Fantastico! Senza fatica siamo passati da 2 a 2.25 euro!

**Apotema:-** Si può fare di meglio! Ogni quattro mesi, e cioè per

tre volte, ritirate il capitale con gli interessi e ricapitalizzate il tutto. Dopo i primi quattro mesi avrete l'euro investito più un terzo di euro, e quindi  $1 + \frac{1}{3}$  di euro. Se reinvestite il tutto per altri quattro mesi, alla fine del secondo quadrimestre avrete  $\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2$  euro, che reinvestirete di nuovo per un quadrimestre. Al termine dell'anno avrete in tutto  $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3$  euro. Se fate i conti trovate che  $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2.37$ .



**Furby:-** Ma allora uno può diventare ricchissimo!

**Apotema:-** Aspetta a dirlo! Se anziché tre volte, reinvestite  $n$  volte l'euro coi suoi interessi, ecco che alla fine dell'anno avrete... Chi me lo dice?

**Furby:-** Avremo  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  euro!

**Apotema:-** Se poniamo  $x = \frac{1}{n}$ , allora  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$  e quando  $n$  è molto grande ecco che  $x$  è molto piccolo e il

capitale finale diventa in numero di Nepero!

**Svelty**:- Se ricapitalizziamo ogni giorno dell'anno il capitale

finale diventa  $\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 2.71457$  euro, che ha già tre cifre

uguali al numero di Nepero. Se ricapitalizziamo ogni ora, siccome in un anno ci sono  $365 \times 24 = 8760$  ore, il capitale

finale diventa  $\left(1 + \frac{1}{8760}\right)^{8760} = 2.71813$  euro!

**Furby**:- Prova ogni minuto!

**Svelty**:- In un anno ci sono  $8760 \times 60 = 525600$  minuti e il

capitale finale diventa  $\left(1 + \frac{1}{525600}\right)^{525600} = 2.71828$  euro!

**Furby**:- Niente da fare! Il numero di Nepero ci impedisce di diventare ricchi!

**Apotema**:- Questo esempio ci fa capire che c'è una grande varietà di problemi in cui sbucca fuori il numero di Nepero. Il capitale cresce in proporzione al capitale stesso e al tempo e vediamo adesso che ogni volta che una grandezza che è legata a un'altra cresce in proporzione a se stessa e all'altra, allora compare il numero di Nepero. Nell'esempio appena visto avevamo un capitale unitario, cioè di un euro, e una costante di proporzionalità rispetto al tempo uguale anch'essa a uno, ovvero l'interesse annuo del 100%. Ecco allora che si otteneva, dopo un incremento unitario del tempo, cioè un anno, un valore del capitale proprio uguale a  $e$ .

**Normy**:- Facciamo in tempo a vedere un altro esempio?

**Apotema**:- Vorrei prima ricavare un risultato semplice ma

importante. L'uguaglianza  $e = (1+x)^{\frac{1}{x}}$  vale anche quando  $x$  è un numero negativo molto piccolo. Se infatti poniamo  $y = -x$ , allora

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1-y)^{-\frac{1}{y}} = \left(\frac{1}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}} = \left(\frac{1-y+y}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}} = \left(1 + \frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}}.$$

Se  $x$  è un numero negativo molto piccolo, allora  $y$  è un numero positivo molto piccolo e quindi  $1-y \cong 1$  e  $(1+x)^{\frac{1}{x}} \cong (1+y)^{\frac{1}{y}} \cong e$ .

**Normy:-** Qual è il senso di questo fatto?

**Apotema:-** Che  $(1+x)^{\frac{1}{x}} \cong e$  anche quando  $x$  è un numero piccolo negativo. Prova con  $x = -0.0001$ , Svelty!

**Svelty:-** Mi viene 2.71842!

**Apotema:-** Tutto qua! L'importanza di questo fatto la vedremo quasi subito. Torniamo ancora una volta all'esempio dell'attenuazione luminosa. Se abbiamo una lastra molto sottile, di spessore  $\Delta s$ , ecco che la variazione di intensità luminosa  $\Delta I$  tra il raggio entrante e quello trasmesso sarà direttamente proporzionale sia allo spessore  $\Delta s$  che all'intensità luminosa  $I_0$  del raggio entrante.

**Sekky:-** Perché dovrebbe essere così, professore?

**Apotema:-** Supponiamo che uno spessore di 10cm attenui la luce del 30%. Non sarà certo corretto dire che uno spessore di 20cm attenua del 60%. Infatti se la luce entrante è 100, quella uscente dal primo strato è 70, ma quella uscente dal secondo strato è il 70% di 70, e cioè 49. L'attenuazione è stata allora del 51% e non del 60%. Come abbiamo ribadito più volte, non c'è proporzionalità diretta tra lo spessore e l'attenuazione. Se lo spessore è però molto piccolo, varrà sempre di più la sovrapposizione degli effetti! Immaginiamo di dividere un piccolo spessore  $\Delta s$  nella somma di due spessori  $\Delta s_1$  e  $\Delta s_2$ . Supponiamo che il primo spessore attenui dello 0.1% e il secondo dello 0.2%. Di quanto attenua l'intero spessore? Se la luce entrante è 100, allora quella uscente dal primo strato è 99.9 e quella uscente dal secondo è il 99.8% di 99.9 che fa...

**Svelty:-**  $0.998 \times 99.9 = 99.7002$  !

**Apotema:-** L'attenuazione è allora dello 0.2998%, mentre la somma delle attenuazioni è  $0.1\% + 0.2\% = 0.3\%$ . La differenza è dello 0.0002%! Per piccoli spessori vale dunque con eccellente approssimazione la sovrapposizione degli effetti. Cerchiamo ora di esprimere la variazione di intensità luminosa  $\Delta I$  come una certa funzione  $g$  dello spessore, quando è molto piccolo, e dell'intensità entrante  $I_0$ , cioè cerchiamo la forma della funzione  $\Delta I = g(\Delta s, I_0)$ . Fissata l'intensità entrante  $I_0$ , abbiamo che  $\Delta I$  è funzione solo di  $\Delta s$  e che vale la sovrapposizione degli effetti. Ne segue che  $\Delta I = b\Delta s$ , dove  $b$  è

costante per un'intensità  $I_0$  costante, ma dipende in generale da  $I_0$ . Possiamo allora scrivere che  $\Delta I = g(\Delta s, I_0) = b(I_0) \Delta s$ . Teniamo adesso costante  $\Delta s$  e vediamo come varia  $\Delta I$  al variare di  $I_0$ . Se la lastra attenua del 2%, con un'intensità entrante 100, l'intensità uscente è 98. Se invece l'intensità entrante è 50, allora la luminosità uscente è 49. Infine, se l'intensità entrante è 150, allora quella uscente è 147, che è proprio  $98 + 49$ . Dunque l'effetto della somma è la somma degli effetti e la funzione  $b$  è lineare pura e quindi del tipo  $b(I_0) = kI_0$ . In definitiva,  $\Delta I = kI_0 \Delta s$ . Poiché l'intensità uscente è minore di quella entrante, avremo che  $\Delta I < 0$  e quindi  $k < 0$ . Preferiamo usare un valore positivo di  $k$  e scrivere che

$$\Delta I = -kI_0 \Delta s.$$

**Dubby:-** E se lo spessore non è molto piccolo?

**Apotema:-** Sia  $s$  uno spessore qualsiasi. Lo dividiamo in un numero  $n$  molto grande di piccolissimi strati di spessore  $\Delta s$ . Siano rispettivamente  $I_0$  e  $I_1$  le intensità della luce entrante e uscente dal primo strato. Avremo che  $\Delta I = I_1 - I_0 = -kI_0 \Delta s$ , e quindi che  $I_1 = I_0(1 - k\Delta s)$ . Per il secondo strato, per l'intensità  $I_2$  della luce uscente, varrà allora la formula  $I_2 = I_1(1 - k\Delta s) = I_0(1 - k\Delta s)^2$ . Continuando così per tutti gli  $n$  strati, avremo finalmente che la luce uscente dall'ultimo strato sarà legata a quella entrante nel primo strato dalla relazione  $I_n = I_0(1 - k\Delta s)^n$ . Ma  $I_n$  non è altro che la luce  $I(s)$  uscente dallo strato di spessore  $s$ . Ricordando che  $s = n\Delta s$ , e quindi  $n = \frac{s}{\Delta s}$ , avremo allora che

$$I(s) = I_0(1 - k\Delta s)^{\frac{s}{\Delta s}}.$$

Ma se  $\Delta s$  è molto piccolo, lo è anche  $x = -k\Delta s$ . Ne segue che

$$\Delta s = -\frac{x}{k} \text{ e che } \frac{s}{\Delta s} = -\frac{ks}{x}, \text{ da cui}$$

$$I(s) = I_0(1 - k\Delta s)^{\frac{s}{\Delta s}} = I_0(1 + x)^{-\frac{ks}{x}} = I_0 \left[ (1 + x)^{\frac{1}{x}} \right]^{-ks} \cong I_0 e^{-ks}.$$

L'approssimazione è tanto migliore quanto più  $\Delta s$  è piccolo e, potendo mentalmente ridurlo a piacere, la relazione  $I(s) = I_0 e^{-ks}$  deve valere esattamente!

**Sekky:-** Questa è proprio la forma della legge di Lambert-Beer che avevo trovato!

**Apotema:-** Abbiamo appena visto una cosa molto importante, che riprenderemo la prossima lezione. Se ho una funzione  $y = f(x)$  tale che, per incrementi molto piccoli  $\Delta x$  di  $x$ , l'incremento  $\Delta y$  è direttamente proporzionale sia a  $y$  che a  $\Delta x$ , cioè  $\Delta y = cy\Delta x$ , allora  $f(x) = y_0 e^{cx}$ , dove  $e$  è il numero di Nepero. In particolare, si tratta di una funzione esponenziale! Abbiamo così almeno tre modi di individuare una funzione esponenziale  $f$ :

- $f$  è monotona e manda progressioni aritmetiche in geometriche;
- $f$  è monotona e tale che per la funzione  $g(x) = \frac{f(x)}{f(0)}$  vale la proprietà che l'effetto della somma è il prodotto degli effetti;
- posto  $y = f(x)$ , per piccolissimi incrementi  $\Delta x$  di  $x$ , l'incremento  $\Delta y$  è direttamente proporzionale sia a  $y$  che a  $\Delta x$ .

Per la prossima volta, provate a ricavare di nuovo la legge del decadimento radioattivo ragionando come abbiamo fatto oggi con l'attenuazione luminosa!



## LEZIONE XVI

**Dubby:-** Prof, quasi tutti hanno trovato il compito per casa un po' troppo difficile! Potrebbe correggercelo lei?

**Apotema:-** E tu, Geny, ci sei riuscito?

**Geny:-** Direi di sì.

**Apotema:-** Allora vieni alla lavagna a spiegarci quello che hai fatto!

**Geny:-** Dovevamo ritrovare la legge del decadimento radioattivo utilizzando la caratterizzazione del numero di Nepero, e cioè

che  $e \cong (1+x)^{\frac{1}{x}}$ , quando  $x$  è molto piccolo, non importa se positivo o negativo.

**Apotema:-** Benissimo!

**Geny:-** lo ho ragionato così. Se al tempo  $t$  ho una certa quantità  $R$  di un elemento radioattivo ecco che, in un breve intervallo di tempo  $\Delta t$ , la variazione  $\Delta R$  della quantità di elemento sarà direttamente proporzionale sia alla quantità  $R$  che alla durata  $\Delta t$ .

**Dubby:-** E cosa te lo fa pensare?

**Geny:-** Se divido mentalmente la quantità  $R$  in due parti  $R_1$  e  $R_2$ , il decremento complessivo  $\Delta R$  di elemento in un tempo  $\Delta t$  fissato sarà la somma dei decrementi  $\Delta R_1$  e  $\Delta R_2$  delle parti  $R_1$  e  $R_2$ !

**Dubby:-** Sono d'accordo.

**Geny:-** Allora, per un  $\Delta t$  fissato, per la funzione che esprime  $\Delta R$  in termini di  $R$  vale la sovrapposizione degli effetti e quindi

$\Delta R = cR$ . Un altro modo di dire la stessa cosa è che  $\frac{\Delta R}{R} = c$ , e

cioè che la frazione di elemento che decade in un tempo fissato  $\Delta t$  è costante. La costante  $c$  però è davvero costante solo se è stato fissato un valore di  $\Delta t$  una volta per tutte e quindi è in realtà a sua volta una funzione di  $\Delta t$  e possiamo scrivere che

$$\frac{\Delta R}{R} = c(\Delta t).$$

**Dubby:-** Questa non l'ho proprio capita!

**Normy:-** Neanche io!

**Geny:-** Pensa all'elemento che decade come ai popcorn che scoppiano in padella, come ci aveva suggerito il prof!

(Apotema sorride compiaciuto)

**Geny:-** Divido materialmente o mentalmente i popcorn che in certo istante non sono ancora scoppiati, chiamiamoli sani, in due gruppi. Supponiamo che nel primo gruppo, in dieci secondi, scoppino  $m$  popcorn e nel secondo gruppo ne scoppino  $n$ . Complessivamente, in dieci secondi sono scoppiati  $m+n$  popcorn. La funzione che lega il numero di popcorn scoppiati in 10 secondi al numero di popcorn che erano sani all'inizio dei 10 secondi soddisfa la proprietà della sovrapposizione degli effetti! Ne segue che il numero di popcorn che scoppiano in 10 secondi è direttamente proporzionale al numero di popcorn inizialmente sani. Un altro modo di dire la stessa cosa è che la percentuale di popcorn sani che scoppiano in 10 secondi è costante e non dipende dal numero di popcorn.

**Dubby:-** E questo l'avevo capito!

**Bronty:-** Sono scoppiato anch'io...

**Geny:-** Immagina che in dieci secondi scoppi il 20% dei popcorn inizialmente sani. In questo caso avremmo  $\Delta t = 10 \text{ sec}$  e  $c = 0.2$ .

**Normy:-** Ti seguo!

**Geny:-** Se invece di 10 secondi considero una durata diversa, la percentuale di popcorn che scoppiano cambia! Per esempio in 4 secondi ne scoppierà una frazione minore e in 30 secondi una maggiore!

**Dubby:-** Sono d'accordo!

**Geny:-** Ma la percentuale di popcorn che scoppiano non è direttamente proporzionale all'intervallo di tempo!

**Normy:-** E perché no?

**Geny:-** Perché man mano che i popcorn scoppiano, il numero di sani diminuisce e quindi diminuisce il numero di popcorn che scoppiano!

**Normy:-** Non credo di avere capito del tutto...

**Geny:-** Supponiamo che, come ho detto prima, in 10 secondi scoppi il 20% dei popcorn sani. Hai una padella coi popcorn che stanno scoppiando e, in un certo istante, ci sono 100 popcorn sani. In 10 secondi ne scoppia il 20%, cioè 20, e ne restano 80, ok?

**Normy:-** Ok!

**Geny:-** Se invece di 10 secondi avessimo aspettato 20 secondi, quanti ne sarebbero scoppiati?

**Normy:-** 40!

**Geny:-** No! Nei primi 10 secondi ne sarebbero scoppiati 20 e quindi ne sarebbero rimasti sani 80! Negli altri 10 secondi sarebbe scoppiato il 20% degli 80 sani, e quindi ne sarebbero scoppiati 16! In tutto 36 e non 40!

**Normy:-** Comincio a capire, anche se non c'è una gran differenza poi...

**Geny:-** Perché 10 secondi sono pochi per i popcorn! Proviamo con un minuto! Un minuto sono 6 volte 10 secondi, e secondo te dovrebbero scoppiare 6 volte 20 popcorn, che fanno 120 popcorn! Cosa palesamente impossibile, perché i popcorn sani erano 100! -

**Normy:-** Mi stai convincendo...

**Geny:-** Quanti ne scoppiano invece in un minuto? Nei primi 10 secondi ne scoppiano 20 e ne restano 80 sani. Nei successivi 10 secondi ne scoppiano 16 e ne restano 64. Poi, nel terzo intervallo ne scoppiano il 20% di 64 che fa circa 13 e ne restano 51. Poi, nel quarto intervallo ne scoppiano 10 e ne restano 41 sani. Poi 8 e ne restano 33 sani e, infine, nell'ultimo intervallo, ne scoppiano 7 e ne restano 26! Quindi in un minuto ne scoppiano 74!

**Normy:-** Ok, Geny! Ho capito due cose: primo, che la percentuale di popcorn che scoppia è costante solo in relazione a una durata fissata e, secondo, che non è direttamente proporzionale alla durata!

**Geny:-** Il fatto notevole però è che per durate molto brevi la percentuale di popcorn che scoppiano è direttamente proporzionale alla durata stessa!

**Normy:-** E come mai?

**Geny:-** Tu stesso hai affermato che non c'era una gran differenza tra la tua previsione che usava la proporzionalità daretta e il calcolo esatto passando da 10 a 20 secondi! Immaginiamo di prendere un intervallo più piccolo. In un intervallo di tempo brevissimo scoppiano pochi popcorn e la quantità di popcorn sani resta praticamente la stessa per cui, nel successivo uguale intervallo di tempo scoppia praticamente lo stesso numero di popcorn! E così il numero di popcorn scoppiati

è direttamente proporzionale alla durata!

**Normy:-** Non vorrei sbagliarmi, ma ho capito!

**Dubby:-** Adesso è tutto chiaro!

**Apotema:-** Geny, mi stai rubando il mestiere!

**Geny:-** Ricordiamoci solo che la percentuale di popcorn scoppiati, nel nostro caso, è la percentuale  $\frac{\Delta R}{R}$  di elemento

disintegrato e che abbiamo indicato con  $c(\Delta t)$  la funzione che lega la percentuale di elemento disintegrato alla durata di tempo  $\Delta t$  a cui si riferisce.

**Normy:-** Quindi  $c(\Delta t) = k\Delta t$  !

**Geny:-** Come abbiamo fatto in classe, ho preferito scrivere  $c(\Delta t) = -k\Delta t$  , perché l'incremento  $\Delta R$  è in realtà un decremento e quindi è negativo per una durata positiva!

**Normy:-** Mi hai di nuovo confuso!

**Geny:-** Con  $\Delta R$  abbiamo indicato il valore finale meno quello iniziale. Nel caso dei popcorn, se passano da un numero  $R_1 = 100$  a un numero  $R_2 = 80$  , l'incremento  $\Delta R$  vale  $R_2 - R_1 = 80 - 100 = -20$  !

**Normy:-** Allora non è un incremento, ma un decremento!

**Apotema:-** Nella scienza e nella tecnica si usa solo il termine positivo. Si dice che una formica pesa tot microgrammi anche se è leggera o che è lunga tot millimetri anche se è corta. Si parla di accelerazione anche quando la velocità diminuisce e di dilatazione anche quando una figura si contrae. Altrettanto, si parla di incremento anche quando in realtà si tratta di un decremento. Un decremento diventa un incremento negativo!

**Gioky:-** Come dire che uno studente che passa dal 6 al 4 ha avuto un miglioramento negativo!

**Apotema:-** Non dirlo forte, Gioky, che se ti sente un ispettore ministeriale ti ruba l'idea! Ma adesso concludi, Geny.

**Geny:-** Siamo arrivati alla conclusione che  $\Delta R = -kR\Delta t$  , quando  $\Delta t$  è un intervallo di tempo molto breve.

**Apotema:-** E dove volevamo arrivare?

**Geny:-** A determinare la forma della funzione che esprime  $R$  in termini di  $t$ . Dividiamo l'intervallo di tempo da 0 a  $t$  in un numero

molto grande  $n$  di intervalli piccolissimi di ampiezza  $\Delta t = \frac{t}{n}$  . Se

$R_0$  è il valore di  $R$  all'istante zero, allora, dopo un intervallo di tempo  $\Delta t$  avremo che  $\Delta R = R_1 - R_0 = -kR_0\Delta t$ , da cui  $R_1 = R_0 - kR_0\Delta t = R_0(1 - k\Delta t)$ . Nell'intervallo successivo avremo che  $R_2 = R_1(1 - k\Delta t)$  e quindi che  $R_2 = R_0(1 - k\Delta t)^2$ . Continuando con gli intervalli successivi, avremo che  $R_3 = R_0(1 - k\Delta t)^3$  e così via, fino ad arrivare a  $R_n = R_0(1 - k\Delta t)^n$ . Più  $\Delta t$  è piccolo e più  $R_n$  fornisce una stima precisa per  $R(t)$ .

Se poi ricordiamo che  $n = \frac{t}{\Delta t}$ , arriviamo a scrivere che

$$R(t) \cong R_0(1 - k\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}}.$$

**Svelty:-** E qui interviene il numero  $e$ !

**Fuory:-** Il numero... 2.61828! Anzi, il numero 2.618281828 !

**Apotema:-** "Scienza" si scrive con la "i", Fuory!

**Fuory:-** Accidenti! Allora volevo dire 2.71828 !

**Apotema:-** Così va meglio!

**Geny:-** Come ho detto all'inizio, sappiamo che  $e \cong (1+x)^{\frac{1}{x}}$ , quando  $x$  è molto piccolo, non importa se positivo o negativo. A questo punto pongo  $x = -k\Delta t$  che, essendo  $\Delta t$  molto piccolo, è pure lui molto piccolo. Ne segue che  $\frac{t}{\Delta t} = -\frac{kt}{x}$  e, andando a sostituire, trovo che

$$R_0(1 - k\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} = R_0(1 + x)^{-\frac{kt}{x}} = R_0 \left[ (1 + x)^{\frac{1}{x}} \right]^{-kt} \cong R_0 e^{-kt}.$$

La legge del decadimento radioattivo è allora  $R(t) = R_0 e^{-kt}$ .

**Apotema:-** Davvero bravissimo, Geny!

**Scetty:-** E qual è il significato della costante  $k$ ?

**Apotema:-** Avevamo inizialmente trovato la forma

$R(t) = R_0 2^{-\frac{t}{T}}$ , dove  $T$  è il tempo di dimezzamento. Abbiamo poi visto che sarebbe stato possibile scrivere la funzione nella forma

$R(t) = R_0 3^{-\frac{t}{T}}$ , dove questa volta  $T$  è il tempo in cui si riduce a

un terzo. Se poniamo  $k = \frac{1}{T}$ , ecco che la funzione assume la forma  $R(t) = R_0 e^{-\frac{t}{T}}$  e così questa volta  $T = \frac{1}{k}$  rappresenta il tempo in cui la quantità dell'elemento radioattivo si riduce a una frazione  $\frac{1}{e}$ .

**Normy:-** E quindi a che percentuale?

**Apotema:-** Nella calcolatrice avete il tasto  $e^x$ , che vi calcola appunto la funzione esponenziale in base  $e$ . Per calcolare  $\frac{1}{e}$  ti basta quindi calcolare... cosa?

**Normy:-** Mi basta calcolare  $e^{-1}$ !

**Apotema:-** Calcolalo!

**Normy:-** 0.3678794411!

**Apotema:-** Dunque la percentuale è circa del 37%. Per rispondere a Scetty, la costante  $k$  ha le dimensioni dell'inverso di un tempo e  $\frac{1}{k}$  è il tempo in cui l'elemento si riduce al 37% della quantità iniziale.

**Scetty:-** Ok, prof! Solo mi è rimasto un dubbio. Abbiamo usato delle uguaglianze approssimate e poi abbiamo scritto un'uguaglianza esatta! Come è possibile?

**Apotema:-** Si tratta di questioni che vedremo in dettaglio nei prossimi anni, ma cercherò ugualmente di rispondere, anche se non pretendo di essere del tutto convincente. Più  $\Delta t$  è piccolo o, che è la stessa cosa, più  $n$  è grande, più il risultato è preciso. Poiché possiamo dividere mentalmente l'intervallo di tempo in un numero grande a piacere di parti, ecco che il risultato si avvicina a piacere al risultato esatto, che risulta quindi essere quello trovato da Geny. Lo so che non ti ho convinto completamente, ma il discorso ci porterebbe troppo lontano dal nostro sentiero!

**Sekky:-** Siamo ormai arrivati alla fine dell'argomento, professore?

**Gioky:-** Manca ancora la descrizione in termini causa/effetto delle funzioni potenze!

**Normy:-** E poi abbiamo finito?

**Apotema:-** Non ancora. Ma Gioky ha ragione e adesso viene alla lavagna a colmare questa lacuna. Allora, Gioky, prova a formulare la proprietà in questione e poi prova a dimostrarla.

**Gioky:-** Per una funzione potenza pura  $f$  vale la proprietà  $f(x_1x_2) = f(x_1)f(x_2)$  per ogni coppia di numeri positivi  $x_1$  e  $x_2$ . Nel linguaggio causa/effetto: l'effetto del prodotto è il prodotto degli effetti. Viceversa, se una funzione  $f$  è monotona e per ogni coppia di numeri positivi  $x_1$  e  $x_2$  vale l'uguaglianza  $f(x_1x_2) = f(x_1)f(x_2)$ , allora  $f$  è una potenza pura.

**Apotema:-** Impeccabile, Gioky!

**Gioky:-** Per la prima parte uso il fatto che conosciamo la forma di una funzione potenza pura e le sue proprietà. In particolare, deve essere  $f(x) = x^b$  e quindi per ogni coppia di numeri positivi  $x_1$  e  $x_2$  si ha che

$$f(x_1x_2) = (x_1x_2)^b = x_1^b x_2^b = f(x_1)f(x_2).$$

**Apotema:-** E la prima parte è andata!

**Gioky:-** Supponiamo adesso che  $f$  sia monotona e che per ogni coppia di numeri positivi  $x_1$  e  $x_2$  si abbia che  $f(x_1x_2) = f(x_1)f(x_2)$ . Devo far vedere che  $f$  è positiva, che manda progressioni geometriche in geometriche e che  $f(1) = 1$ .

**Apotema:-** Esattamente.

**Gioky:-** Allora... devo far vedere che se  $x$  è positivo, lo è anche  $f(x)$ ...

**Apotema:-** Chiedi l'aiuto del pubblico?

**Geny:-** Basta scrivere  $x$  come  $\sqrt{x}\sqrt{x}$  e applicare la proprietà!

**Gioky:-** Dunque... Ah, sì! Posso scrivere che  $f(x) = f(\sqrt{x}\sqrt{x})$ , ma  $f(\sqrt{x}\sqrt{x}) = f(\sqrt{x})f(\sqrt{x}) = [f(\sqrt{x})]^2$  e quindi  $f(x) > 0$ !

**Scetty:-** Maggiore o... uguale!

**Gioky:-** Vero! E allora come si fa?

**Apotema:-** Il fatto è che potrebbe valere anche zero!

**Geny:-** Ma solo nel caso in cui vale zero dappertutto!

**Apotema:-** Proprio come per le funzioni esponenziali. Dobbiamo escluderlo esplicitamente! Prova prima a vedere quanto deve valere  $f(1)$ ...

**Gioky:-** Il trucco me lo ricordo! Siccome  $1 = 1 \cdot 1$ , allora

$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1)$  e quindi deve essere  $f(1) = 1$  oppure...  $f(1) = 0$  ... Ma non capisco perché se  $f(1) = 0$  allora la funzione si deve annullare dappertutto!

**Geny:-** Ogni numero  $x$  lo puoi scrivere come  $x \cdot 1$  e se applichi la proprietà dell'effetto del prodotto vedi subito che se  $f(1) = 0$  allora  $f(x) = 0$  per tutti gli  $x$  !

**Gioky:-** Ho capito!  $f(x) = f(x \cdot 1) = f(x)f(1)$  e quindi se  $f(1) = 0$  , allora è come dice Geny!

**Apotema:-** Dunque, l'enunciato corretto è che se una funzione  $f$  è monotona, non nulla e per ogni coppia di numeri positivi  $x_1$  e  $x_2$  vale l'uguaglianza  $f(x_1 x_2) = f(x_1)f(x_2)$  , allora  $f$  è una potenza pura.

**Gioky:-** Ci è rimasto da verificare che manda progressioni geometriche in geometriche. La solita tecnica! Se in  $x$  vale  $f(x)$  , allora in  $xq$  vale  $f(xq) = f(x)f(q)$  e quindi se si moltiplica sempre per uno stesso numero l'ingresso, anche l'uscita viene moltiplicata sempre per uno stesso numero. Una progressione geometrica in ingresso ha come uscita un'altra progressione geometrica! Abbiamo a che fare con una funzione potenza pura!

**Apotema:-** Bene!

**Sekky:-** Scusi, professore, volevo chiederle una cosa. Come esempio di funzione potenza noi avevamo visto la terza legge di Keplero, ma su Internet ho trovato un grafico che era una retta! Come è possibile? Non è una funzione lineare quella che lega il periodo al semiasse maggiore!

**Apotema:-** Possibilissimo, Sekky!

**Sekky:-** Ma... allora...

**Apotema:-** Evidentemente, si trattava di un grafico con scale entrambe logaritmiche!

**Normy:-** E cosa sono le scale logaritmiche?

**Apotema:-** Abbiamo già accennato a questo argomento quando abbiamo parlato della legge psicofisica di Fechner e Weber. Ricordate? Vi ho mostrato che se la funzione che lega la sensazione allo stimolo fosse lineare, i nostri sensi saprebbero distinguere bene solo a fondo scala. Invece sono logaritmici.

**Normy:-** Mi era sembrato di aver capito tutto, ma adesso mi sembra di non aver capito niente!

**Apotema:-** Se disegnate sul vostro quaderno una scala che va da 1 a 100000 e segnate i numeri 1, 10, 100, 1000, 10000, e 100000, ecco che i punti che rappresentano 1000, 10000, e 100000 sono ben distinguibili tra loro, mentre quelli che rappresentano i numeri 1, 10, 100 risultano appiccicati tra loro e quindi indistinguibili. Dovendo rappresentare numeri di ordini di grandezza così diversa, conviene allora rappresentarli su una cosiddetta scala logaritmica.

**Normy:-** E che cosa sarebbe?

**Apotema:-** Una scala in cui i numeri vengono rappresentati non dal punto che dovrebbe rappresentarli, ma da quello che corrisponde al logaritmo di quel numero. Per esempio, se usiamo il logaritmo decimale, il numero 1 viene rappresentato dal punto che corrisponderebbe allo zero, e il 10, il 100, il 1000, il 10000 e il 100000, dai punti che dovrebbero rappresentare i numeri 1, 2, 3, 4 e 5.

**Normy:-** E il numero 200?

**Apotema:-** Dal punto che corrisponde al numero  $\log 200$ , che fa 2.30103. Il numero positivo  $x$  viene rappresentato dal punto che, in un usuale sistema di coordinate su una retta, corrisponde al numero  $\log x$ .

**Sekky:-** Scusi, professore, ma ancora non ho capito come mai la terza legge di Keplero era rappresentata da una retta!

**Apotema:-** Un po' di pazienza, Sekky! Vai invece al pc e accendi il proiettore e proviamo a costruire una scala logaritmica col Cabri.

**Sekky (mentre sta andando alla postazione col pc):-** E come devo fare?

**Apotema:-** Disegni sull'asse delle ascisse i punti che rappresentano i numeri interi in scala logaritmica. Solo che il punto che rappresenta il numero  $n$  avrà coordinata  $\log n$ !

**Sekky:-** Ci provo, professore!

(Dopo pochi minuti Sekky è al lavoro e sta disegnando i punti che rappresentano i numeri interi da uno a 10)

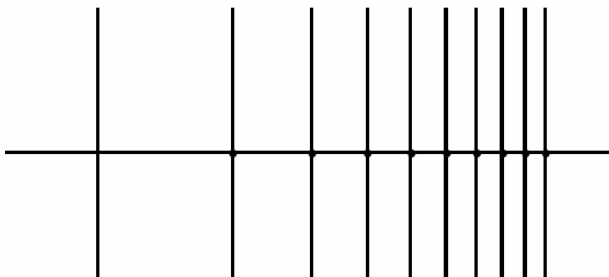
**Apotema:-** Il numero 1 va a finire in 0, il 2 in 0.301, il 3 in 0.477, il 4 in 0.602, il 5 in 0.699, il 6 in 0.778, il 7 in 0.845, l'8 in 0.903, il 9 in 0.954 e il 10 in 1!

**Sekky:-** Va bene così?

**Apotema:-** Non si vedono molto bene. Manda una

perpendicolare all'asse x per ciascun punto!

**Sekky:-** Ecco fatto! Le linee sono sempre più vicine!

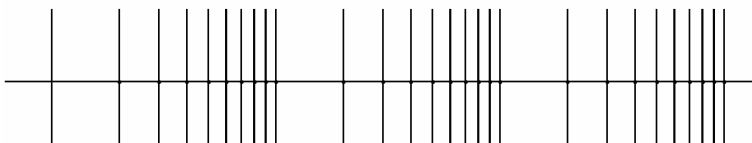


**Apotema:-** Questa è una scala logaritmica! Ma se visualizzi le rette che rappresentano i numeri 11, 12, 13, ecc., ecco che diventano così vicine da non distinguerle più! Il pregio di una scala logaritmica è quello di rappresentare sia numeri grandi che piccoli. L'intervallo da 1 a 10 è ampio come quello da 10 a 100, da 100 a 1000 e così via. Ecco allora che dopo il 10 si rappresentano i numeri 20, 30, 40, ... fino a 100. E poi 200, 300, 400, ... fino a 1000, e così via. Prova a rappresentare anche le decine da 20 a 100.

**Sekky:** Allora ..  $\log_{10} 20 = 1.301...$

**Geny:-** Sono gli stessi numeri di prima aumentati di uno! Se si moltiplica per 10 il logaritmo decimale aumenta di 1! La stessa cosa succederà per le centinaia! E poi per le migliaia! -

**Apotema:-** Bravissimo, Geny! Il disegno delle rette si ripete periodicamente. Continua a disegnare, Sekky, fino a 1000.



**Sekky:-** Ci vuole troppo tempo!

**Svelty:-** Basta disegnarne una sola! Fai lasciare la traccia e cambi solo il numero! Fammi provare!

(Svelty disegna le rette il un attimo!)

**Apotema:-** La scala si può estendere anche all'indietro coi numeri 0.1, 0.2, 0.3, ... fino a 1 e poi ancora coi numeri 0.01, 0.02, 0.03, ... fino a 0.1! Ogni volta il disegno viene solo traslato. Anzi, se nascondi gli assi e disegni solo le rette risulta impossibile capire a quale intervallo si riferisce ogni gruppo di rette!

**Normy:-** E allora come si fa?

**Apotema:-** Lo decidiamo noi! Non succede forse la stessa cosa per le scale lineari? Se avete una scala con le tacche a ugual distanza, dove si mette il numero zero?

**Normy:-** Dove ci fa comodo!

**Apotema:-** Stessa cosa per le scale logaritmiche!

**Sekky:-** Questo l'ho capito, professore, ma non ho ancora capito il grafico rettilineo della terza legge di Keplero!

**Apotema:-** Il fatto clamoroso è che se in un sistema di assi cartesiani scegliamo in modo opportuno se usare una scala logaritmica in uno solo degli assi o in tutti e due, ecco che anche le funzioni esponenziali, logaritmiche e potenze hanno per grafico una retta!

**Sekky:-** Incredibile! Ma... proprio esattamente una retta, professore?

**Apotema:-** Esattamente una retta, Sekky! Ma questo ormai lo vediamo la prossima volta. Come compito, provate a realizzare al Cabri un foglio bilogaritmico, cioè con entrambi gli assi in scala logaritmica, e due fogli logaritmici, uno con la scala logaritmica in ascissa e quella lineare in ordinata, e l'altro con la scala lineare in ascissa e quella logaritmica in ordinata.

**Normy:-** Dobbiamo stamparli?

**Apotema:-** Sarà meglio! Ai miei tempi si trovavano in cartoleria, come i fogli di carta millimetrata.

**Gioky:-** Fogli di carta millimetrata? Ma che cosa sono?!

**Apotema:-** Niente... lascia perdere!



## LEZIONE XVII

**Apotema:-** Vedo che avete tutti portato le stampe dei fogli con le scale logaritmiche e bilogaritmiche!

**Svelty:-** In realtà alcuni hanno fotocopiato le mie...

**Apotema:-** Vediamo qual è il pregio di usare queste scale per le funzioni esponenziali, logaritmiche e potenze. Inutile dire che non è necessario fare la fatica di costruirle e di stamparle per poi disegnarci sopra un grafico. Infatti, i software che consentono di tracciare i grafici di funzioni hanno quasi tutti l'opzione per le scale logaritmiche.

**Bronty:-** Allora cosa le abbiamo fatte a fare?

**Apotema:-** Una volta nella vita è bene provare a costruirle e a fare un disegno a mano! Ma cominciamo subito dalle funzioni esponenziali. Come ormai ben sapete, la forma generale di una funzione esponenziale è  $y = ab^x$ , con  $a$  e  $b$  positivi. Se prendiamo il logaritmo decimale di ambo i membri, otteniamo che  $\log y = \log a + x \log b$  e se poniamo  $Y = \log y$ ,  $A = \log a$  e  $B = \log b$ , possiamo riscrivere l'uguaglianza nella forma

$$Y = A + Bx.$$

**Normy:-** Una funzione lineare!

**Sekky:-** L'equazione di una retta!

**Apotema:-** Sostituire  $y$  con  $Y = \log y$  equivale a usare una scala logaritmica sull'asse delle ordinate. Dunque, se usiamo un grafico con l'asse delle ordinate in scala logaritmica, ecco che il grafico di una funzione esponenziale diventa una retta di pendenza  $\log b$  e intercetta  $\log a$ . In particolare, la retta passa per l'origine se  $a = 1$  e ha pendenza positiva o negativa a seconda che sia  $b > 1$  o  $0 < b < 1$ . Ovviamente, per  $b = 1$  la retta è orizzontale.

**Sogny:-** Fantastico!

**Apotema:-** Vi faccio notare che il vantaggio non è soltanto quello di tracciare il grafico con un righello. Oggi i software di matematica vi consentono di tracciare il grafico di una funzione esponenziale con la stessa facilità di un retta.

**Dubby:-** E allora qual è il vero vantaggio?



La prima linea orizzontale del blocco più in basso corrisponde quindi a 0.1 e le altre ancora a 0.01 e 0.001. Se consideriamo tutte le linee orizzontali, ecco che, dall'alto al basso, corrispondono ai valori 1, 0.9, 0.8, ... 0.1, 0.09, 0.08, ... , 0.01, 0.009, 0.008, ... fino a 0.001. In ascissa possiamo decidere di andare a passi di 10000 anni a partire da 0. Si arriva così fino a 50000 anni. Ecco allora che la retta passa per il punto in alto a sinistra e ci basta quindi disegnare un solo altro punto. Conviene disegnare un punto il più lontano possibile dal precedente per ridurre l'errore. Calcolate quanto vale  $y$  per

$$t = 50000 \text{ anni e cioè } 2^{-\frac{50000}{5730}}.$$

**Svelty:-** 0.0024!

**Apotema:-** Benissimo! Rientra proprio a pelo nell'intervallo rappresentato sull'asse delle ordinate. Si trova tra 0.002 e 0.003.

**Normy:-** Un po' più in basso della metà!

**Apotema:-** No! Se guardate la scala logaritmica, il 4 è circa al 60% del tratto tra l'1 e il 10.

**Geny:-**  $\log 4 = 0.60$ ! Me lo ricordo perché è il doppio di  $\log 2$ !



**Apotema:-** Proviamo allora a fare il disegno. Svelty, se hai con te il file con il reticolo, accendi il pc e il proiettore!

(Svelty aggiunge gli assi e alcuni valori numerici e traccia la retta).

**Apotema:-** Vedete ora come è facile stimare dal grafico, a colpo d'occhio, i valori della funzione. Per esempio, si vede che la quantità di carbonio 14 si riduce al 10% in circa 19000 anni e che in 20000 anni diventa circa il 9%. Ancora, si riduce a un centesimo in circa 38000 anni.

**Normy:-** Facilissimo da usare!

**Apotema:-** Nel caso delle funzioni logaritmiche, la forma generale è  $y = a + \log_b x$  che, usando la formula del cambio di

base, possiamo riscrivere come  $y = a + \frac{1}{\log b} \log x$ . Se poniamo

$B = \frac{1}{\log b}$  e  $X = \log x$ , l'uguaglianza precedente diventa

$$y = a + BX.$$

Questa volta il grafico diventa una retta se si usa la scala logaritmica sull'asse delle ascisse. Fatto del tutto prevedibile dal momento che le funzioni logaritmiche ed esponenziali sono reciprocamente le une le inverse delle altre.

**Dubby:-** Ma allora si può usare lo stesso reticolo di prima! Basta ruotarlo!

**Apotema:-** Certamente! Infatti ai miei tempi si distingueva solo tra fogli di carta logaritmici o bilogaritmici.

**Sekky:-** Adesso, professore, credo di avere ormai capito quel grafico lineare per la terza legge di Keplero...

**Apotema:-** Lo vediamo subito. La forma generale di una funzione potenza è  $y = ax^b$ , dove  $a$  è un numero positivo. Se, ancora una volta, prendiamo il logaritmo decimale di ambo i membri, otteniamo che  $\log y = \log a + b \log x$ . Infine, se poniamo  $A = \log a$ ,  $Y = \log y$  e  $X = \log x$ , l'uguaglianza precedente prende la forma

$$Y = A + bX.$$

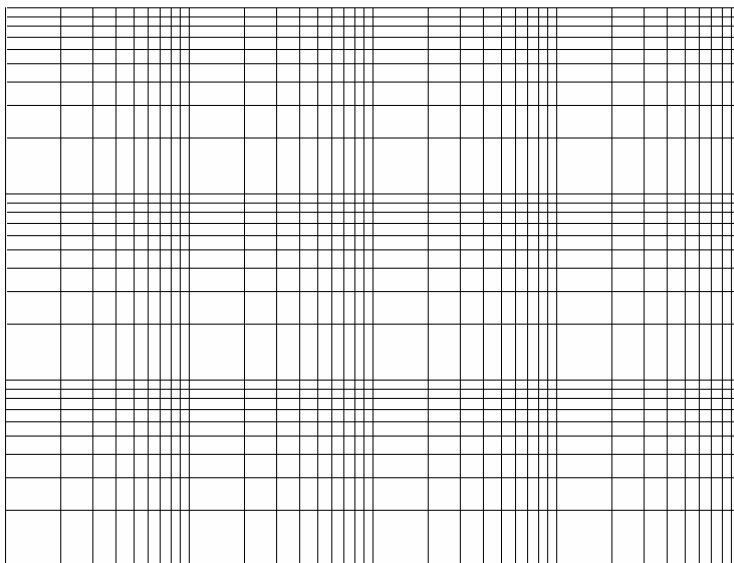
**Sekky:-** Ecco da dove viene la retta! Se si usa una scala logaritmica per entrambi gli assi, il grafico di una funzione potenza diventa una retta!

**Apotema:-** Svelty, visualizza adesso il tuo reticolo bilogaritmico e vediamo intanto di raccogliere i dati di un pianeta vicino al Sole e di uno lontano, ad esempio di Mercurio e Nettuno.

**Scopry:-** Ho qui i dati che avevo trovato una volta per compito! Mercurio ha un periodo di 0.241 anni e un semiasse maggiore di 0.387 unità astronomiche, mentre Nettuno ha un periodo di 165 anni e un semiasse maggiore di 30.1 unità astronomiche!

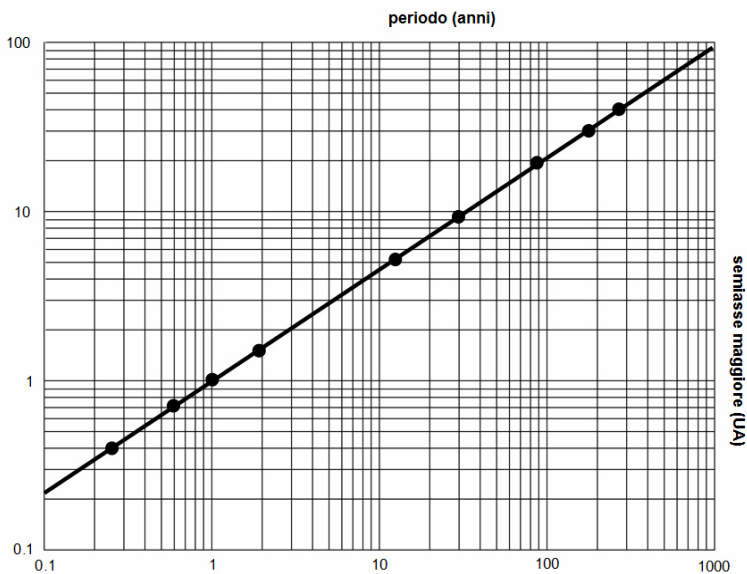
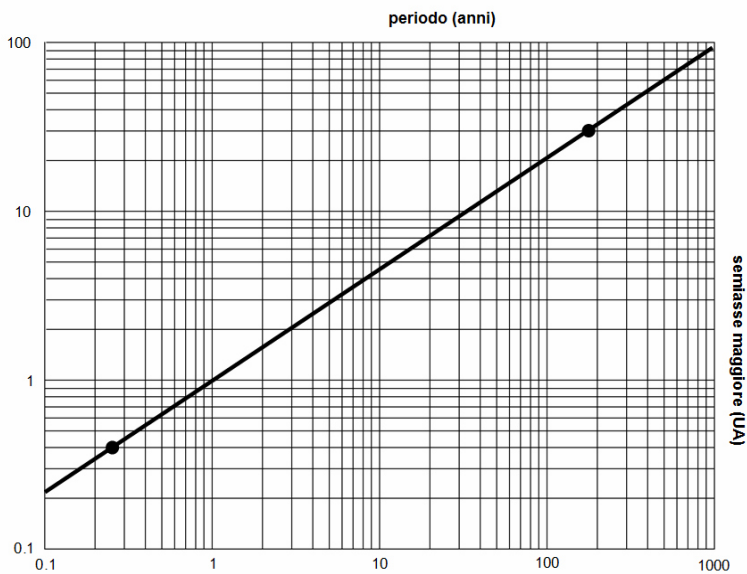
**Apotema:-** Bene. I periodi sono quindi compresi tra  $10^{-1}$  e  $10^3$  anni, e quindi spaziano su 4 ordini di grandezza, mentre i semiassi maggiori sono compresi tra  $10^{-1}$  e  $10^2$  unità astronomiche, e spaziano su 3 ordini di grandezza. Ci occorre quindi un reticolo bilogaritmico con quattro intervalli di potenze di 10 in ascissa e tre in ordinata.

**Svelty:-** Il mio ne aveva 5 e 4, ma lo correggo in un attimo!



**Apotema:-** Benissimo, Svelty! Non ti resta che mettere le potenze di 10 nelle scale e tracciare la retta individuata da Mercurio e Nettuno.

(In pochi minuti la retta è tracciata)



**Apotema:-** Già si vede che la retta passa per il punto (1, 1), che rappresenta la Terra: periodo un anno e semiasse maggiore una unità astronomica! Proviamo adesso a inserire tutti i pianeti.

**Scopry:-** Venere: periodo 0.625, semiasse maggiore 0.723.

**Gioky:-** Terra: periodo 1, semiasse maggiore 1!

**Normy:-** Marte: periodo 1.88, semiasse maggiore 1.52.

**Sekky:-** Giove: periodo 11.9 anni, semiasse maggiore 5.20 unità astronomiche.

**Ovvy:-** Saturno: periodo 29.5, semiasse maggiore 9.54.

**Lenty:-** Urano: periodo 84.1, semiasse maggiore 19.2.

**Scetty:-** E Plutone?

**Apotema:-** Ma sì, dai! Mettiamo anche il vecchio Plutone, che è stato cacciato dalla famiglia dei pianeti!

**Scetty:-** Periodo 248, semiasse maggiore 39.5!

(Svelty, aiutato dai compagni, sistema sul diagramma anche i punti relativi agli altri pianeti).

**Apotema:-** Allora, Sekky, adesso è chiaro perché la terza legge di Keplero può essere rappresentata da una retta?

**Sekky:-** Chiarissimo, professore!

**Apotema:-** Voglio concludere questa lezione mostrandovi un fossile della mia giovinezza: un regolo calcolatore.

**Sogny:-** E che cos'è, prof?

**Apotema:-** Uno strumento di calcolo che usavo quando ero uno studente come voi di un istituto tecnico industriale. Non c'erano ancora le calcolatrici elettroniche in commercio e si usava questo oggetto per fare moltiplicazioni, divisioni, radici e tanti altri tipi di calcoli.

**Gioky:-** Con quell'affare?

**Apotema:-** Si chiama regolo calcolatore. Consentiva di lavorare con due o tre cifre significative, ma nel laboratorio di fisica ne avevamo uno grande, appeso alla parete, che consentiva di lavorare con anche 4 cifre significative!

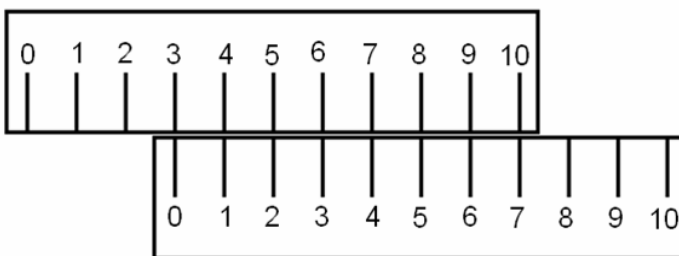
**Normy:-** E... come funziona?

**Apotema:-** Non starò certo a spiegarvi in dettaglio come funziona e, tantomeno, come va impugnato correttamente per far scorrere o bloccare l'asta scorrevole centrale, ma mi limiterò a descrivere il principio di funzionamento, che è basato sulle scale logaritmiche e sulle proprietà dei logaritmi.

**Sekky:-** Ancora una volta i logaritmi come strumento di calcolo! Ma allora, professore, è proprio vero che i logaritmi sono stati

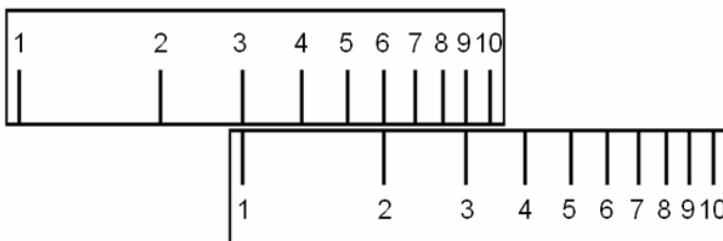
decisivi per lo sviluppo della scienza e della tecnica!

**Apotema:**- Non c'è dubbio, Sekky! Col regolo è possibile eseguire una grande quantità di calcoli, ma ora ci concentriamo sulle moltiplicazioni. Il cuore del regolo consiste di una scala graduata che può scorrere su un'altra scala graduata. Immaginate di avere due scale graduate identiche e speculari, con le tacche equidistanziate e numerate da 0 a 10, in grado di scorrere una sull'altra. Per eseguire l'addizione  $3 + 2$  potete portare la tacca dello zero della seconda scala sulla tacca del 3 della prima scala. Ecco allora che alla tacca del 2 della seconda scala corrisponde quella del 5 della prima scala. Conclusione:  $3 + 2 = 5$  ! Inevitabilmente, la stessa posizione relativa delle scale vi consente anche di leggere che  $3 + 3 = 6$  o che  $3 + 5 = 8$  .



**Normy:** - Ma non dovevamo vedere le moltiplicazioni? -

**Apotema:** - Consideriamo ora due aste graduate scorrevoli come prima, ma con le tacche in scala logaritmica e quindi con scritti i numeri da 1 a 10.



Se portiamo la tacca del numero 1 della seconda scala in corrispondenza del 3 della prima, in corrispondenza del 2 della seconda scala abbiamo il 6 della prima. Abbiamo eseguito la moltiplicazione  $3 \times 2 = 6$ . Infatti, riportando una scala sull'altra, abbiamo eseguito ancora una somma, ma questa volta la somma è tra  $\log 3$  e  $\log 2$ , che fa  $\log 6$ . Ancora una volta abbiamo usato la proprietà che le funzioni logaritmiche trasformano prodotti in somme!

**Svelty:-** Si legge anche che  $3 \times 3 = 9$ !

**Scetty:-** Ma se voglio fare  $3 \times 4$  vado fuori scala!

**Apotema:-** Per semplicità ho messo solo 10 tacche, ma, come nei fogli di carta logaritmica, posso mettere due blocchi di tacche riferiti a due intervalli tra potenze di 10. Inoltre, lo spazio tra una tacca e l'altra lo posso a sua volta suddividere in 10 parti in scala logaritmica. Ma non intendo dedicare altro tempo all'argomento. Si tratta di uno strumento di calcolo molto ingegnoso, ma reso di colpo del tutto obsoleto dall'avvento delle calcolatrici elettroniche. Del resto ogni settore della scienza e della tecnica è costellato di strumenti che un tempo hanno conosciuto un grande successo e ora giacciono nel dimenticatoio.

(E Apotema ripone il regolo nella cartella)

**Normy:-** Ma cos'altro ci resta da vedere ancora su queste funzioni?

**Apotema:-** Ci accontentiamo di essere arrivati fin qui. Dedicheremo un paio di lezioni a fare un po' di esercizi e un'ultima lezione per riassumere tutto quello che abbiamo visto.

**Normy:-** Io ho già scritto quasi un quaderno!

**Apotema:-** Allora temo che lo completerai! Alla prossima!



## LEZIONE XVIII

**Apotema:-** Vediamo di fare qualche esercizio... Consideriamo una popolazione di batteri che cresce su un terreno di coltura mantenuto ricco di nutrienti e quindi senza rischio di rimanere a corto di risorse. Poiché un batterio si divide in un tempo caratteristico, dovrà esistere un tempo di raddoppiamento  $T$  della popolazione. Che cosa possiamo concludere, Normy?

**Normy:-** Che la funzione che esprime la quantità di batteri nel tempo è una funzione esponenziale!

**Apotema:-** Bene. Supponiamo di poter misurare la popolazione di batteri mediante la superficie occupata e che, in un certo istante, la popolazione sia di  $1.2\text{cm}^2$ . Se dopo 50 minuti la superficie è di  $6.8\text{cm}^2$ , quanto tempo occorrerà attendere ancora perché la popolazione raggiunga i  $10\text{cm}^2$ ? Vieni tu, Svelty, alla lavagna?

**Svelty:-** Ok, prof. Beh, prima di tutto scrivo la funzione che mi dà la popolazione nel tempo.

**Apotema:-** Indica con  $B(t)$  la superficie occupata dalla popolazione al tempo  $t$  e con  $B_0$  quella al tempo zero.

**Svelty:-** Allora... se la popolazione è caratterizzata da un tempo di raddoppiamento  $T$  ... posso scrivere che

$$B(t) = B_0 2^{\frac{t}{T}}.$$

**Apotema:-** E adesso torniamo al problema. Da dove si parte per risolvere un problema, dall'inizio o dalla fine?

**Svelty:-** Che domanda! Dall'inizio!

**Apotema:-** Vi ho già detto tante volte che, invece, si parte dalla fine! Se devi partire da Carpi per andare in treno a Bologna, cambiando a Modena e devi essere in stazione a Bologna a una certa ora, da dove parti a guardare gli orari? Dal tratto Carpi-Modena o da quello Modena-Bologna?

**Svelty:-** Parto... parto da Modena-Bologna! Guardo a che ora parte da Modena l'ultimo treno che arriva in tempo utile a Bologna e poi guardo qual è l'ultimo treno da Carpi che arriva a Modena in tempo per prendere il treno per Bologna!

**Apotema:-** Vedi, alla fine dirai che si parte da Carpi alle ore tot e si arriva a Modena alle ore tot, poi si parte da Modena alle ore tot e si arriva a Bologna alle ore tot, ma per trovare gli orari hai dovuto procedere a ritroso. Stessa cosa si fa quando si affronta un problema: devi per prima cosa chiederti cosa devi trovare. E che cosa devi trovare nel nostro caso?

**Svelty:-** Devo trovare dopo quanto tempo la popolazione raggiunge i  $10\text{cm}^2$  a partire da  $6.8\text{cm}^2$ . In questo caso posso pensare di avere  $B_0 = 6.8\text{cm}^2$  e  $B(t) = 10\text{cm}^2$  e devo trovare il tempo  $t$ . Ma mi manca il tempo di raddoppiamento  $T$ !

**Apotema:-** Ecco che adesso il problema è diventato quello di trovare il tempo di raddoppiamento.

**Svelty:-** Posso pensare di avere  $B_0 = 1.2\text{cm}^2$  e, dopo un tempo  $t = 50\text{min}$ , di avere una popolazione  $B(t) = 6.8\text{cm}^2$ . Posso allora calcolare il tempo di raddoppiamento  $T$  e quindi usarlo per trovare il risultato richiesto!

**Apotema:-** Benissimo, Svelty. Procedi!

**Svelty:-** Devo ricavare  $T$ ...

**Apotema:-** Devi cercare di isolare  $T$ , liberandoti un po' alla volta degli altri termini. L'incognita  $T$  compare nel fattore  $2^{\frac{t}{T}}$  e quindi, per prima cosa, ti liberi del fattore  $B_0$  ...

**Svelty:-** ... che portato dall'altra parte diventa un divisore... Quindi scrivo che

$$2^{\frac{t}{T}} = \frac{B(t)}{B_0}.$$

**Apotema:-** Adesso l'incognita  $T$  si trova a esponente...

**Svelty:-** Applico la funzione logaritmica il base 2 ad ambo i membri e ottengo

$$\frac{t}{T} = \log_2 \frac{B(t)}{B_0}.$$

Adesso porto  $T$  dall'altra parte a moltiplicare... e  $\log_2 \frac{B(t)}{B_0}$  dall'altra parte a dividere... e ottengo che

$$T = \frac{t}{\log_2 \frac{B(t)}{B_0}}.$$

**Bronty:-** Mica tutti hanno la calcolatrice coi logaritmi in base qualsiasi!

**Apotema:-** E, allora, come si fa?

**Svelty:-** Applico la formula del cambio di base e passo ai logaritmi decimali:

$$T = \frac{t}{\frac{\log \frac{B(t)}{B_0}}{\log 2}} = \frac{t \log 2}{\log \frac{B(t)}{B_0}}.$$

**Dubby:-** E se uno avesse voluto usare i logaritmi naturali?

**Apotema:-** Sarebbe andato altrettanto bene! I valori sarebbero stati diversi, ma il rapporto lo stesso!

**Svelty:-** Sostituisco i valori numerici e trovo che il tempo di raddoppiamento, in minuti, vale

$$T = \frac{50 \log 2}{\log \frac{6.8}{1.2}} = 20.0.$$

**Normy:-** Adesso usiamo sempre la stessa formula, ma per trovare il tempo  $t$ !

**Svelty:-** Non c'è bisogno di ricavare tutto daccapo! Basta ripartire dall'ultima uguaglianza... per ricavare subito che

$$t = T \frac{\log \frac{B(t)}{B_0}}{\log 2}.$$

Sostituisco i valori numerici e trovo che

$$t = 20.0 \frac{\log \frac{10}{6.8}}{\log 2} = 11.1.$$

**Apotema:-** Conclusione: se la colonia di batteri impiega 50 minuti per passare da 1.2 a 6.8 centimetri quadrati, allora impiegherà ancora circa 11.1 minuti per raggiungere i 10 centimetri quadrati. Si poteva anche ragionare usando la

caratterizzazione in termini causa/effetto per arrivare a capire che si trattava di una funzione esponenziale. Se dopo un tempo

$t$  la popolazione cresce di una percentuale  $f(t) = \frac{B(t)}{B_0}$  allora,

dividendo la durata  $t$  nella somma di due durate  $t_1$  e  $t_2$ , avremo che dopo un tempo  $t_1$  sarà cresciuta di una percentuale  $f(t_1)$  e dopo un tempo  $t_2$  sarà cresciuta di una percentuale  $f(t_2)$ .

Dovrà allora essere  $f(t_1 + t_2) = f(t_1)f(t_2)$ . La funzione  $f$  ha allora la forma  $f(t) = b^t$  e la superficie della popolazione sarà allora data da  $B(t) = B_0 b^t$ . Per risolvere il problema precedente, questa volta occorre prima calcolare la base  $b$ . Ricaviamo che

$$b^t = \frac{B(t)}{B_0}, \text{ da cui, elevando ambo i membri alla } \frac{1}{t}, b = \left[ \frac{B(t)}{B_0} \right]^{\frac{1}{t}}.$$

In particolare,  $b = \left( \frac{6.8}{1.2} \right)^{\frac{1}{50}} = 1.0353$ . Adesso l'incognita è  $t$ , per cui

$$t = \log_b \frac{B(t)}{B_0} = \frac{\log \frac{B(t)}{B_0}}{\log b} = \frac{\log \frac{10}{6.8}}{\log 1.0353} = 11.1.$$

**Normy:-** E col numero di Nepero?

**Apotema:-** Potevamo osservare che, relativamente a un intervallo molto piccolo di tempo  $\Delta t$ , l'incremento di popolazione  $\Delta B$  deve essere direttamente proporzionale sia alla popolazione  $B$  che al tempo  $\Delta t$ . Infatti, se la popolazione raddoppia o triplica (la superficie!), raddoppia o triplica anche il numero di batteri generati nel tempo  $\Delta t$ . Inoltre, se il tempo  $\Delta t$  è molto piccolo, la popolazione resta praticamente invariata e genera il doppio o il triplo di batteri in un tempo doppio o triplo. Dunque  $\Delta B = kB\Delta t$ . Come abbiamo visto in dettaglio, la funzione cercata ha allora la forma  $B(t) = B_0 e^{kt}$ . Partendo da questa equazione, per risolvere il problema precedente, dobbiamo prima calcolare il valore di  $k$ . Abbiamo che  $e^{kt} = \frac{B(t)}{B_0}$ ,

da cui  $kt = \ln \frac{B(t)}{B_0}$  e quindi  $k = \frac{1}{t} \ln \frac{B(t)}{B_0} = \frac{1}{50} \ln \frac{6.8}{1.2} = 0.0347$ .

Ecco allora che

$$t = \frac{1}{k} \ln \frac{B(t)}{B_0} = \frac{1}{0.0347} \ln \frac{10}{6.8} = 11.1.$$

**Lenty:-** Troppo veloce, prof!

**Apotema:-** Questa volta hai ragione, Lenty, ma rifarete i calcoli con calma a casa. Quello che ho voluto mostrarvi è che non basta conoscere la forma delle varie funzioni, ma occorre saper risolvere le equazioni in cui quelle funzioni sono coinvolte. Vediamo allora di imparare a risolvere in modo sistematico le equazioni fondamentali che riguardano le funzioni esponenziali, logaritmiche e potenze.

**Sekky:-** Che cosa si intende, professore, per equazioni fondamentali?

**Apotema:-** In questo caso intendevo le equazioni del tipo  $f(x) = c$ , dove  $c$  è un numero dato e  $f$  è una funzione di uno dei tipi che abbiamo appena studiato. Si tratta quindi dei seguenti tre tipi di equazioni:  $b^x = c$ ,  $\log_b x = c$ ,  $x^b = c$ .

**Dubby:-** E le funzioni lineari?

**Apotema:-** Certo, Dubby, ci sarebbero anche quelle, ma spero proprio che tutti sappiate risolvere le equazioni del tipo  $bx = c$ !

**Norky:-** Le equazioni di 1° grado!

**Apotema:-** Già! Cominciamo dalle equazioni esponenziali fondamentali. Vi propongo 5 equazioni:

$$\begin{array}{lll} 1) 3^x = -7; & 2) 5^x = 0; & 3) 2^x = 7; \\ & 4) 1^x = 5; & 5) 1^x = 1. \end{array}$$

Che cosa mi dici della prima, Sekky?

**Sekky:-** È impossibile, professore! Le funzioni esponenziali assumono solo valori positivi!

**Furby:-** Per lo stesso motivo, è impossibile anche la seconda!

**Apotema:-** Esatto. E cosa mi dici, Dubby, della terza?

**Dubby:-** Come abbiamo fatto più volte in classe, applichiamo la funzione logaritmica in base 2 ad ambo i membri!

**Apotema:-** E cosa ottieni?

**Dubby:-** Che  $x = \log_2 7 \dots$  e quindi che  $x = \frac{\log 7}{\log 2}$ .

**Apotema:-** Bene. E la quattro? Che cosa mi dici, Ovvy?

**Ovvy:-** Siccome  $1^x$  fa sempre 1, l'equazione è impossibile!

**Apotema:-** Giusto.

**Ovvy:-** E la cinque è indeterminata, nel senso che tutti i numeri positivi sono soluzione!

**Apotema:-** Adesso dovreste essere in grado di dirmi cosa succede nel caso generale  $b^x = c$ .

**Svelty:-** Intanto deve essere  $b > 0$ ! Se  $c \leq 0$ , l'equazione è impossibile. Se  $c > 0$  e  $b \neq 1$ , allora la soluzione è

$x = \log_b c = \frac{\log c}{\log b}$ . Se invece  $b = 1$ , allora l'equazione è

impossibile se  $c \neq 1$  e indeterminata se  $c = 1$ !

**Apotema:-** Bel colpo, Svelty! Lo scrivo per bene alla lavagna e voi riguardatevelo con attenzione, ripensando agli esempi precedenti. Vediamo adesso l'equazione logaritmica fondamentale  $\log_b x = c$ . Cosa mi dici, Scetty?

**Scetty:-** Questa volta  $c$  può assumere qualsiasi valore... il logaritmo in base  $b$  esiste poi soltanto se  $b$  è positivo e diverso da uno... Direi che c'è allora la soluzione positiva  $x = b^c$ , che ho ottenuto applicando ad ambo i membri la funzione esponenziale in base  $b$ .

**Apotema:-** Restano le equazioni potenze fondamentali, cioè le equazioni del tipo  $x^b = c$ . Vi scrivo di nuovo qualche esempio:

$$\begin{array}{lll} 1) x^{\frac{3}{4}} = -2; & 2) x^{\sqrt{2}} = 0; & 3) x^{\frac{7}{3}} = 8; \\ & 4) x^0 = 4; & 5) x^0 = 1. \end{array}$$

**Apotema:-** Che cosa mi dici della prima, Bronty?

**Bronty:-** Le funzioni potenze vanno dai reali positivi nei reali positivi e non possono valere  $-2$ . L'equazione è impossibile!

**Apotema:-** E la seconda, Copy?

**Copy:-** Impossibile!

**Apotema:-** Perché?

**Gioky:-** Ha copiato da Bronty!

**Bronty:-** Perché le potenze hanno valori positivi!

**Apotema:-** Passiamo alla terza, Lenty.

**Lenty:-** Elevo tutto al cubo... e poi prendo la radice settima...

**Apotema:-** Ti sei ricondotto alle vecchie potenze a esponente intero e alle loro inverse, le radici ennesime, ma nella nuova accezione non sempre puoi farlo. Pensa se ti avessi dato l'equazione  $x^{\sqrt{5}} = 13!$

**Lenty:-** Allora elevo tutto alla  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  !

**Apotema:-** Bene, Lenty! E quindi, che cosa fai nell'equazione precedente?

**Lenty:-** Elevo ambo i membri alla  $\frac{3}{7}$  e ottengo che  $x = 8^{\frac{3}{7}}$ .

**Apotema:-** Tu, Sogny, dimmi cosa succede negli ultimi due casi.

**Sogny:-** Siccome  $x^0 = 1$ , l'equazione quattro è impossibile, mentre la cinque è indeterminata!

**Apotema:-** Allora, Scopy, vedi di riassumere la risoluzione dell'equazione potenza fondamentale  $x^b = c$ .

**Scopy:-** Se  $c \leq 0$ , l'equazione è impossibile. Se  $c > 0$  e  $b \neq 0$ , allora  $x = c^{\frac{1}{b}}$ . Infine, se  $b = 0$ , l'equazione è impossibile se  $c \neq 1$  e indeterminata se  $c = 1$ .

**Apotema:-** Come vedete, non è affatto difficile!

**Dubby:-** Mi scusi, prof, ma ho un dubbio...

**Apotema:-** Quale?

**Dubby:-** Noi abbiamo usato il fatto che  $1^x = 1$  e  $x^0 = 1$ , ma siamo sicuri che queste proprietà valgano anche secondo la nuova definizione?

**Apotema:-** Come abbiamo definito il numero  $b^x$  per  $b > 0$  e per un  $x$  qualsiasi? -

**Dubby:-** L'abbiamo definito...

**Apotema:-** Come abbiamo definito la funzione esponenziale in base  $b$ ?

**Dubby:-** Come la funzione monotona  $f$  che manda progressioni aritmetiche in geometriche, con  $f(0) = 1$  e  $f(1) = b$ .

**Apotema:-** L'algoritmo di inserimento di medi, protratto all'infinito, ci garantisce che una tale funzione risulta definita per tutti i numeri. In particolare, allora, come viene definita la funzione  $f(x) = 1^x$ ?

**Dubby:-** Come la funzione monotona  $f$  che manda progressioni aritmetiche in geometriche, con  $f(0) = 1$  e  $f(1) = 1$ .

**Apotema:-** Esattamente. Vedi allora che la ragione della progressione geometrica definita dai due punti vale 1 e quindi i suoi termini valgono tutti 1. Inserendo poi dei medi geometrici si ottiene sempre 1! Dunque  $1^x = 1$  per tutti i numeri reali  $x$ .

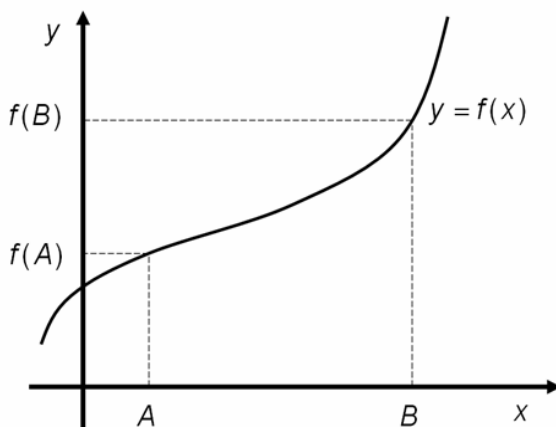
**Dubby:-** Adesso è chiaro. Sto pensando a  $x^0$  ... Sì, anche in quel caso la progressione geometrica in uscita è sempre uguale a 1!

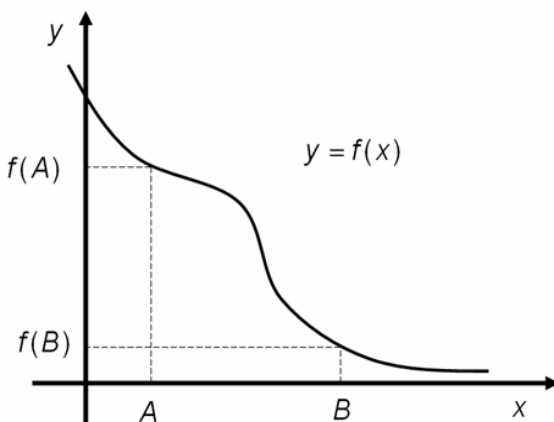
**Scetty:-** E le disequazioni? Come si risolvono le disequazioni con le funzioni esponenziali, logaritmiche e potenze?

**Apotema:-** Non è difficile, trattandosi di funzioni monotone!

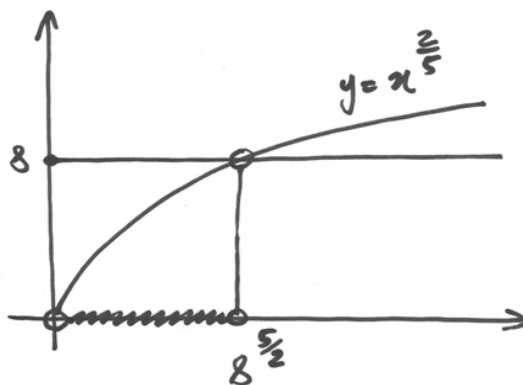
**Normy:-** Che cosa c'entra il fatto che siano monotone con le disequazioni?

**Apotema** (facendo un disegno alla lavagna):- In realtà è importante che siano strettamente monotone e invertibili! Se parti dalla disuguaglianza  $A < B$  e  $f$  è una funzione crescente definita su  $A$  e  $B$ , allora  $f(A) < f(B)$  e quindi puoi passare da una disuguaglianza a un'altra. Se invece  $f$  è decrescente, allora  $f(A) > f(B)$ . In ogni caso, se  $f$  è monotona crescente o decrescente, ottieni ancora una disuguaglianza. Se poi sono anche invertibili, applicando la funzione inversa, ottieni di nuovo la disuguaglianza di partenza.





Nel caso di disequazioni, applicando una funzione crescente o decrescente invertibile, si ottiene una disequazione equivalente. È inutilmente complicato ricordare la risoluzione di una disequazione fondamentale esponenziale, logaritmica o potenza. È invece molto più utile ed economico ricordare bene i grafici di queste funzioni e risolvere le disequazioni aiutandosi con un disegno. Vediamo un paio di esempi. Risolviamo la disequazione  $x^{\frac{2}{5}} < 8$ .



L'esponente è compreso tra zero e uno e il grafico è concavo verso il basso. Basta un disegno qualitativo. Vediamo subito che

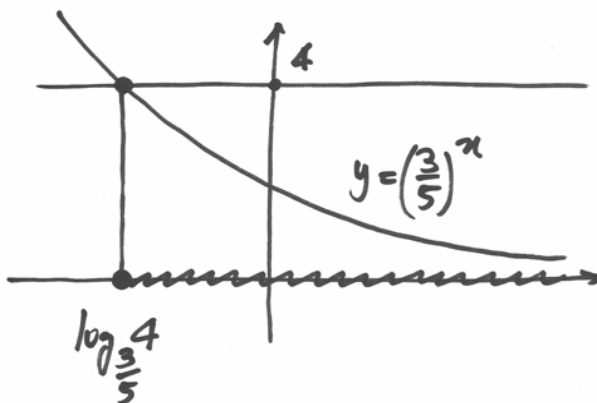
le soluzioni sono date dai numeri  $x$ , con  $0 < x < 8^{\frac{5}{2}}$ .

Consideriamo ora la disequazione  $\left(\frac{3}{5}\right)^x \leq 4$ . La base

dell'esponenziale è minore di uno e il grafico è decrescente.

L'uguaglianza si ha per  $x = \log_{\frac{3}{5}} 4 = \frac{\log 4}{\log \frac{3}{5}} = \frac{\log 4}{\log 3 - \log 5} < 0$  e

quindi le soluzioni sono i numeri  $x$ , con  $x \geq \frac{\log 4}{\log 3 - \log 5}$ .



Provate, per la prossima volta, a risolvere queste disequazioni:

1)  $x^{-\frac{8}{3}} \leq 5$ ;

2)  $\log_{\frac{3}{5}} x > 7$ .

## LEZIONE XIX

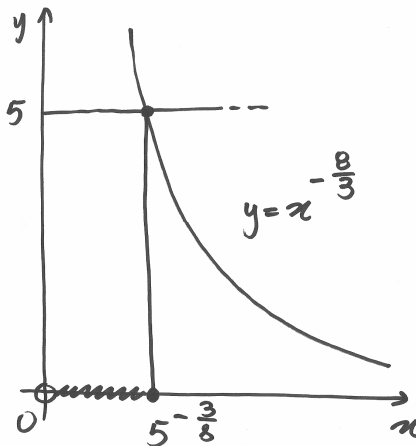
**Apotema:-** Vieni tu, Fuory, a correggere il compito?

**Fuory:-** Avevamo due disequazioni da risolvere, una con le potenze e una coi logaritmi.

**Apotema:-** Vediamo.

**Fuory:-** Per risolverle, ho fatto il disegno del grafico come ci ha detto lei. La prima disequazione era  $x^{-\frac{8}{3}} \leq 5$ . Ho disegnato il grafico di  $y = x^{-\frac{8}{3}}$ , che è il grafico di una funzione potenza con esponente negativo.

(Fuory disegna il grafico alla lavagna)



**Fuory:-** Ho che  $x^{-\frac{8}{3}} = 5$  per  $x = 5^{-\frac{3}{8}}$  e, siccome la funzione è decrescente, la risposta è  $x \leq 5^{-\frac{3}{8}}$ .

**Apotema:-** Tutti d'accordo?

**Scetty:-** No, deve comunque essere  $x > 0$ , per cui la soluzione è  $0 < x \leq 5^{-\frac{3}{8}}$ !

**Svelty:-** Dove  $5^{-\frac{3}{8}} = 0.54687 \dots$

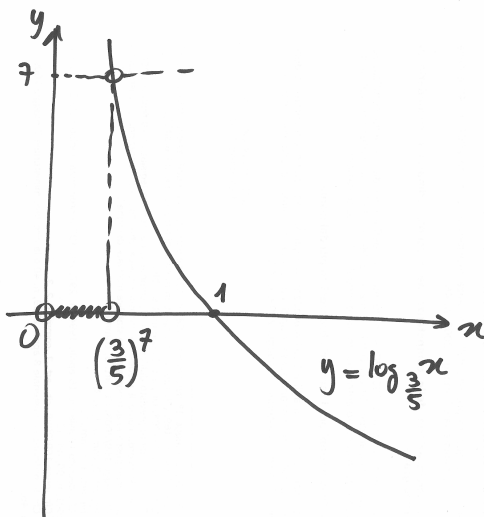
**Apotema:-** È chiaro? Le funzioni potenze con esponente qualsiasi sono definite solo per i numeri positivi.

**Fuory:-** Faccio anche la seconda?

**Apotema:-** Sì, sperando che tu riesca a dare la risposta giusta!

**Fuory:-** Questa volta si tratta di una disequazione logaritmica:

$\log_{\frac{3}{5}} x > 7$ . L'uguaglianza vale per  $x = \left(\frac{3}{5}\right)^7$ , e quindi deve essere  $x > \left(\frac{3}{5}\right)^7$ .



**Apotema:-** Peccato che la funzione  $y = \log_{\frac{3}{5}} x$  sia decrescente!

Sapresti dirmi come mai?

**Fuory:-** Perché...

**Normy:-** Perché la base è minore di uno!

**Fuory:-** Ok, la soluzione è allora  $x < \left(\frac{3}{5}\right)^7$ .

**Apotema:-** Stesso errore di prima! Le funzioni logaritmiche sono definite solo per i numeri positivi!

**Fuory:-** Allora la soluzione è  $0 < x < \left(\frac{3}{5}\right)^7$ .

**Apotema:-** Sì, Fuory, ma non è così che si lavora! Devi disegnare il grafico sapendo bene come sono fatti i grafici delle funzioni logaritmiche, e poi devi trarre le conclusioni giuste. Vai al posto.

**Sogny:-** Avrei una domanda da fare, anche se non c'entra con le equazioni...

**Apotema:-** Dimmi pure, Sogny.

**Sogny:-** Quando, all'inizio, abbiamo introdotto le funzioni lineari non avevamo subito richiesto che fossero monotone, ma poi siamo stati costretti a richiederlo per poter usare l'algoritmo di inserimento dei medi. Dubby le aveva allora chiesto che cosa sarebbe cambiato se non avessimo preteso la monotonia e lei gli aveva risposto che sarebbe successa una cosa terribile! Che avremmo ottenuto delle funzioni inimmaginabili, che assumono tutti i possibili valori per infinite volte tra due numeri qualsiasi! Come mai? Non può dircelo?

**Apotema:-** Temo di no, ma proverò almeno a darvene un'idea. Questo fatto poi si verifica non solo per le funzioni che mandano progressioni aritmetiche in aritmetiche, ma anche per quelle che mandano progressioni aritmetiche in geometriche, geometriche in aritmetiche e geometriche in geometriche. Senza la monotonia, invece delle funzioni lineari, esponenziali, logaritmiche e potenze, si ottengono funzioni mostruose! Solo per semplicità, consideriamo il caso di una funzione non monotona che manda progressioni aritmetiche in aritmetiche. In modo sostanzialmente equivalente, consideriamo una funzione  $f$  non monotona per la quale vale la sovrapposizione degli effetti, e cioè per la quale  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ . Per fare un esempio numerico, il più semplice possibile, supponiamo che sia  $f(1) = 1$ . Possiamo facilmente dimostrare che per ogni numero razionale  $q$  deve allora essere  $f(q) = q$ . Infatti, deve essere  $f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2$ ,  $f(3) = f(2 + 1) = f(2) + f(1) = 2 + 1 = 3$ , ecc.

Deve poi essere  $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ , da cui  $f(0) = 0$ .

Inoltre, da una parte deve essere  $f(-1+1) = f(-1) + f(1)$  e, dall'altra,  $f(-1+1) = f(0) = 0$ , da cui  $f(-1) + f(1) = 0$  e quindi  $f(-1) = -f(1) = -1$ .

Continuando si ottiene poi che

$$f(-2) = f(-1-1) = f(-1) + f(-1) = -1 - 1 = -2,$$

$$f(-3) = f(-2-1) = f(-2) + f(-1) = -2 - 1 = -3, \text{ ecc.}$$

Dunque,  $f(n) = n$  per ogni intero  $n$ .

Passiamo ora alle frazioni con denominatore 2. Da una parte abbiamo che  $f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2f\left(\frac{1}{2}\right)$ , mentre dall'altra

$$f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f(1) = 1, \text{ per cui } 2f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \text{ e quindi } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ne segue che } f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(1 + \frac{1}{2}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \text{ ecc.}$$

$$\text{Da } \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1, \text{ si deduce allo stesso modo che } f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \text{ e,}$$

$$\text{più in generale, che } f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}. \text{ Quindi, per ogni numero}$$

razionale  $q$ , abbiamo che  $f(q) = q$ . Abbiamo visto nelle lezioni scorse che, se  $f$  è monotona e vale la sovrapposizione degli effetti, allora  $f(x) = bx$ , dove  $b = f(1)$ . In questo caso, se  $f$  fosse monotona, avremmo che  $f(x) = x$  non solo per i razionali, ma per tutti i reali. Poiché stiamo supponendo che  $f$  non sia monotona, allora dovrà esistere almeno un numero  $u$  per il quale sia  $f(u) \neq u$ . Secondo voi, che tipo di numero deve essere?-

**Geny:-** Un numero irrazionale!

**Scetty:-** E perché mai?

**Geny:-** Perché per i numeri razionali sappiamo già che  $f(x) = x$ !

**Apotema:-** Proprio così, Geny! Se  $f$  non è monotona, deve allora esistere un numero irrazionale  $u$  con  $f(u) \neq u$ . È immediato vedere, ripetendo pari pari i ragionamenti di prima,

che per ogni numero razionale  $q$  dovrà essere  $f(qu) = qf(u)$ .

**Sekky:-** Credo di non aver capito, professore.

**Apotema:-** Per esempio,  $f(2u) = f(u+u) = f(u) + f(u) = 2f(u)$ ,  
 $f(3u) = f(2u+u) = f(2u) + f(u) = 2f(u) + f(u) = 3f(u)$ , ecc. Puoi ripetere per filo e per segno tutti ragionamenti fatti prima e arrivare a dimostrare che  $f\left(\frac{m}{n}u\right) = \frac{m}{n}f(u)$ . Chiaro?

**Sekky:-** Adesso sì, professore!

**Apotema:-** Supponiamo che il numero irrazionale  $u$  con  $f(u) \neq u$  sia  $\sqrt{2}$ . Allora sarà  $f(\sqrt{2}) \neq \sqrt{2}$ . Per fare un esempio concreto, supponiamo che sia  $f(\sqrt{2}) = 2$ .

Allora  $f(q\sqrt{2}) = qf(\sqrt{2}) = 2q$  per ogni numero razionale  $q$ . Cerchiamo adesso di capire come si traduce questo fatto in termini del grafico di  $f$ . I numeri razionali sulla retta si possono pensare ottenuti in questo modo. Scegliamo un verso di percorrenza e l'unità di misura e, assumendola come passo, camminiamo all'infinito in entrambi i versi. Abbiamo così ottenuto i punti di coordinata intera. Dimezziamo il passo e otteniamo i punti corrispondenti alle frazioni con denominatore 2. Ripercorriamo poi la retta con un passo tre volte più corto del passo iniziale, ottenendo tutti i punti che corrispondono alle frazioni con denominatore 3, e così via. Otteniamo così l'insieme dei punti di coordinata razionale: un oggetto geometrico inimmaginabile, ma che possiamo utilmente pensare come una polvere di punti sparsi uniformemente sulla retta e che la ricopre solo parzialmente. I numeri del tipo  $q\sqrt{2}$ , dove  $q$ , è un numero razionale, li possiamo pensare ottenuti con lo stesso procedimento di prima, partendo questa volta da un passo di lunghezza  $\sqrt{2}$ . Arriviamo ancora una volta a una polvere di punti, nessuno dei quali però coincide coi punti della polvere precedente! Sulla polvere dei numeri razionali, il grafico della funzione coincide con quello della funzione  $f(x) = x$ . Possiamo allora pensare al grafico della funzione  $f$  ristretta ai razionali, come a una polvere di punti sulla retta  $y = x$ . Sui numeri del tipo  $q\sqrt{2}$ , con  $q$  razionale, il grafico di  $f$  è ancora una retta per

l'origine, ma... chi mi sa dire con quale pendenza?

**Fuory:-** 2!

**Svelty:-** No! Con pendenza  $\frac{2}{\sqrt{2}}$ , che fa  $\sqrt{2}$ !

**Apotema:-** Bravo Svelty! Se poniamo  $x = q\sqrt{2}$ , allora  $q = \frac{x}{\sqrt{2}}$  e

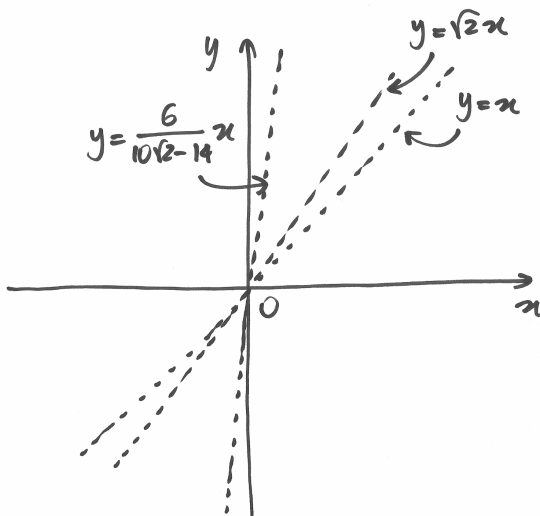
$f(x) = f(q\sqrt{2}) = 2q = \frac{2}{\sqrt{2}}x = \sqrt{2}x$ . Sui numeri del tipo  $q\sqrt{2}$ , il

grafico di  $f$  è allora una polvere di punti sulla retta  $y = \sqrt{2}x$ . Ma non è finita qui!

Sia, ad esempio,  $v = 10\sqrt{2} - 14 \cong 14.142 - 14 = 0.142$ . Abbiamo allora che  $f(v) = f(10\sqrt{2} - 14) = 10f(\sqrt{2}) - f(14) = 20 - 14 = 6$ . Per quanto visto in precedenza,  $f(qv) = qf(v) = 6q$  per ogni razionale  $q$  e quindi, sulla polvere di numeri del tipo  $q(10\sqrt{2} - 14)$ , il grafico della funzione  $f$  è una polvere di punti

sulla retta  $y = \frac{6}{10\sqrt{2} - 14}x$ . Quanto fa, Svelty,  $\frac{6}{10\sqrt{2} - 14}$ ?

**Svelty:-** Fa 42.2!



**Apotema:** - Già stiamo vedendo che il grafico di  $f$  è sulla retta  $y = x$  per  $x$  razionale, sulla retta  $y = \sqrt{2}x$  per  $x$  del tipo  $q\sqrt{2}$  con  $q$  razionale e sulla retta  $y = \frac{6}{10\sqrt{2} - 14}x$  per  $x$  del tipo

$q(10\sqrt{2} - 14)$  con  $q$  razionale. Una retta di pendenza 1, una di pendenza circa 1.4 e un'altra di pendenza circa 42! Ma possiamo ripetere questo procedimento all'infinito e trovare che esistono infinite polveri di numeri a due a due disgiunte e sulle quali il grafico sta su rette diverse passanti per l'origine!

**Sogny:** - Davvero mostruoso!

**Dubby:** - Ma perché ha scelto proprio il numero  $10\sqrt{2} - 14$ ?

**Apotema:** - Andava bene un qualsiasi numero del tipo  $q\sqrt{2} + r$ , con  $q$  e  $r$  razionali. Se ho scelto  $10\sqrt{2} - 14$  è stato per ottenere un numero piccolo, infatti  $10\sqrt{2} \cong 14$ . In questo modo ho ottenuto una retta di pendenza molto grande. Potete scoprire che esistono polveri di numeri sui quali il grafico è una retta di pendenza grande a piacere! Siccome  $\sqrt{2} = 1.4142\dots$ , se prendete il numero irrazionale  $w = 1000\sqrt{2} - 1414 \cong 0.2$ , avrete che per ogni razionale  $q$

$$f(qw) = qf(w) = q[1000f(\sqrt{2}) - f(1414)] = q[2000 - 1414] = 586q.$$

Ne segue che, sulla polvere di numeri del tipo  $qw$ , con  $q$  razionale, il grafico della funzione sta sulla retta per l'origine di pendenza  $\frac{586}{1000\sqrt{2} - 1414} \dots$

**Svelty:** - 2743.9!

**Apotema:** - Dunque il grafico di  $f$ , non appena ammettiamo che sia  $f(1) = 1$  e  $f(\sqrt{2}) = 2$ , è composto da polveri di punti che stanno su infinite rette per l'origine e, in particolare, con pendenze grandi a piacere! Poiché in ogni intervallo della retta, per quanto piccolo, cadono punti di ciascun tipo di polvere, ecco che in quell'intervallo la funzione assume una moltitudine di valori grandi a piacere!

**Sogny:** - Fantastico!

**Dubby:** - Ma lei ci aveva detto che assumeva infinite volte tutti

gli infiniti valori reali!

**Apotema:-** Non ho voluto dire una frase troppo complicata e ho un po' semplificato la questione. La proprietà è in realtà leggermente diversa. Comunque voi prendiate un numero reale, in ogni intervallo, per quanto piccolo, la funzione  $f$  assumerà infinite volte valori che sbagliano il numero dato per meno di una quantità prefissata, piccola a piacere!

**Normy:-** Non sono sicuro di avere capito...

**Apotema:-** Non importa! Mi basta che tu e i tuoi compagni abbiate intuito che, se non richiediamo la monotonia, invece delle belle funzioni che abbiamo studiato, si ottengono dei mostri impossibili da immaginare!

**Sekky:-** La prossima lezione sarà l'ultima su questo argomento, professore?

**Apotema:-** Sì, ma questo non significa affatto che non rivedremo più queste funzioni! Anzi, come spero abbiate capito, ce le ritroveremo fra i piedi un po' dappertutto!

**Normy:-** Credo di avere ancora bisogno di tempo per chiarire tutto quello che abbiamo fatto, prof!

**Apotema:-** La prossima lezione faremo un breve riassunto di quanto abbiamo visto, poi, nelle prossime settimane, col dottor Precisini vi cimenterete in diversi esercizi e problemi per consolidare i concetti e per acquisire una certa abilità di calcolo nell'uso di queste funzioni.

**Bronty:-** No! Precisini no! Non lo sopporto!

**Dubby:-** A me, invece, non dispiace! È molto chiaro e disponibile!

**Lenty:-** E poi non corre come Apo!

**Dormy:-** Ha una voce stridula e non si riesce a dormire!

**Asy:-** Per me è uguale!

## LEZIONE XX

**Apotema:-** Eccoci arrivati all'ultima lezione sulle funzioni lineari, esponenziali, logaritmiche e potenze. Vediamo di concludere con un riassunto di ciò che abbiamo visto e con un riepilogo delle formule incontrate.

**Dubby:-** Solo una cosa, prof!

**Apotema:-** Sentiamo, Dubby.

**Dubby:-** Abbiamo definito queste funzioni in termini di progressioni aritmetiche e geometriche. Mi chiedevo se esistono altri tipi di progressioni e quindi se è possibile definire altre funzioni combinando in tutti i modi possibili le progressioni in ingresso con quelle in uscita.

**Apotema:-** Diciamo che esistono infiniti tipi di successioni di numeri. Le successioni che, nella tradizione, prendono il nome di progressioni sono solo una piccolissima parte. Oltre che delle progressioni aritmetiche e geometriche, vi potrà capitare di sentir parlare delle progressioni armoniche. Si chiama progressione armonica ogni successione di numeri che ha per termini i reciproci dei termini di una progressione aritmetica. La progressione armonica più famosa è quindi la successione

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ , ma ne esistono infinite altre!

**Scetty:-** Ma questa non si può prolungare a sinistra!

**Apotema:-** Vero, Scetty.

**Normy:-** E si possono inserire anche dei medi armonici? Esiste la media armonica di due numeri?

**Apotema:-** Certamente! Dati due numeri  $a$  e  $b$ , inserire un medio armonico significa trovare un numero  $z$  tale che i numeri

$\frac{1}{a}, \frac{1}{z}, \frac{1}{b}$  siano in progressione aritmetica.

**Svelty:-** Allora  $\frac{1}{z}$  deve essere la media aritmetica tra  $\frac{1}{a}$  e  $\frac{1}{b}$ !

**Apotema:-** Bravo Svelty! Deve essere  $\frac{1}{z} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$  e quindi

$$z = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}, \text{ che è appunto la media armonica tra } a \text{ e } b.$$

Per esempio, la media armonica tra  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{4}$  è  $z = \frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$ .

**Sogny:-** Allora possiamo chiederci quali sono le funzioni che mandano progressioni aritmetiche in progressioni armoniche!

**Apotema:-** Sicuro, Sogny! Esse godranno della proprietà che  $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{2f(x_1)f(x_2)}{f(x_1) + f(x_2)}$ . Potete realizzare un algoritmo di

inserimento dei medi per calcolarne il valore e cercare la loro forma generale.

**Normy:-** E cosa salta fuori?

**Apotema:-** Non voglio rubarvi la soddisfazione di scoprirlo da soli! Dovreste essere perfettamente in grado di farcela!

**Sekky:-** Vuol dire che non le studieremo, professore?

**Apotema:-** A dire il vero le abbiamo già studiate! Ma non staremo a rivederle di nuovo seguendo la strada usata per le funzioni lineari, esponenziali, logaritmiche e potenze. Per queste ultime quattro famiglie di funzioni, come vi ho detto all'inizio della prima lezione, ho invece voluto seguire un percorso che consentisse una trattazione il più possibile unitaria, per evidenziare al massimo le analogie e le differenze.

(Apotema divide la lunga lavagna in quattro parti uguali, tracciando tre linee verticali)

**Apotema:-** Vedete di dividere il foglio del quaderno in quattro colonne o, meglio ancora, di dividere due pagine affiancate in due colonne ciascuna. Nelle quattro colonne scriverete nell'ordine le proprietà e le formule principali relative alle funzioni lineari, esponenziali, logaritmiche e potenze. Io compilerò alla lavagna la colonna delle funzioni lineari, mentre le altre colonne le verrete a compilare voi a turno.

**Normy:-** Possiamo portare con noi il quaderno?

**Apotema:-** E portatevi il quaderno! Cominciamo dalle definizioni. Una funzione lineare è una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , monotona, che manda progressioni aritmetiche in progressioni aritmetiche. Continua tu, Furby.

**Furby:-** Una funzione esponenziale è una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,

monotona, che manda progressioni aritmetiche in progressioni geometriche.

**Apotema:-** A te, Rompy!

**Rompy:-** Una funzione logaritmica è una funzione  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , monotona, che manda progressioni geometriche in progressioni aritmetiche.

**Apotema:-** Tacy!

(Tacy scrive qualcosa...)

**Apotema:-** Ok, Tacy, ma adesso leggi quello che hai scritto!

**Tacy** (con un filo di voce):- Una funzione potenza è una funzione  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , monotona, che manda progressioni geometriche in progressioni geometriche.

**Apotema:-** Per calcolare il valore di una funzione lineare nel numero  $x$ , con  $x_1 < x < x_2$ , possiamo usare l'algoritmo dell'inserimento di medi, che fa uso della proprietà che

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \text{ Tocca a te, Fuory!}$$

**Fuory:-** Allora... per calcolare il valore di una funzione logaritmica...

**Apotema:-** Esponenziale!

**Fuory:-** Per calcolare il valore di una funzione esponenziale nel numero  $x$ , con  $x_1 < x < x_2$ , possiamo usare l'algoritmo dell'inserimento di medi, che fa uso della proprietà che

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}.$$

**Apotema:-** Ovvv!

**Ovvv:-** Per calcolare il valore di una funzione logaritmica nel numero  $x$ , con  $x_1 < x < x_2$ , possiamo usare l'algoritmo dell'inserimento di medi, che fa uso della proprietà che

$$f\left(\sqrt{x_1 x_2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

**Apotema:-** Svelty!

**Svelty:-** Per calcolare il valore di una funzione potenza nel numero  $x$ , con  $x_1 < x < x_2$ , possiamo usare l'algoritmo dell'inserimento di medi, che fa uso della proprietà che

$$f\left(\sqrt{x_1 x_2}\right) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}.$$

**Apotema:-** Una funzione lineare ha la forma generale  $f(x) = a + bx$ . A te, Dubby!

**Dubby:-** Una funzione esponenziale ha la forma generale  $f(x) = ab^x$ .

**Apotema:-** Normy!

**Normy:-** Una funzione logaritmica ha la forma generale  $f(x) = a + \log_b x$ .

**Apotema:-** Sogny!

**Sogny:-** Una funzione potenza ha la forma generale  $f(x) = ax^b$ .

**Apotema:-** Una funzione lineare è completamente determinata dai valori che assume su una progressione aritmetica. La funzione lineare che manda la progressione aritmetica

$$\dots, c - 2d, c - d, c, c + d, c + 2d, \dots$$

nella progressione aritmetica

$$\dots, C - 2D, C - D, C, C + D, C + 2D, \dots$$

ha la forma  $f(x) = \frac{D}{d}(x - c) + C$ . Asy!

**Asy:-** Una funzione...

**Suggy:-** Esponenziale...

**Asy:-** Una funzione esponenziale... è completamente determinata dai valori che assume su una progressione...

**Suggy:-** Aritmetica...

**Asy:-** ... su una progressione aritmetica.

**Apotema:-** Continua tu, Suggy!

**Suggy:-** La funzione esponenziale che manda la progressione aritmetica

$$\dots, c - 2d, c - d, c, c + d, c + 2d, \dots$$

nella progressione geometrica

$$\dots, CQ^{-2}, CQ^{-1}, C, CQ, CQ^2, \dots$$

ha la forma  $f(x) = CQ^{\frac{x-c}{d}}$ . A te, Geny!

**Geny:-** Una funzione logaritmica è completamente determinata dai valori che assume su una progressione geometrica. La funzione logaritmica che manda la progressione geometrica

$$\dots, cq^{-2}, cq^{-1}, c, cq, cq^2, \dots$$

nella progressione aritmetica

$$\dots, C - 2D, C - D, C, C + D, C + 2D, \dots$$

ha la forma  $f(x) = D \log_q \frac{x}{c} + C$ .

**Apotema:-** Rozzy!

**Rozzy:-** Una funzione potenza è completamente determinata dai valori che assume su una progressione geometrica. La funzione lineare che manda la progressione geometrica

$$\dots, cq^{-2}, cq^{-1}, c, cq, cq^2, \dots$$

nella progressione geometrica

$$\dots, CQ^{-2}, CQ^{-1}, C, CQ, CQ^2, \dots$$

ha la forma  $f(x) = C \left( \frac{x}{c} \right)^{\log_q Q}$ .

**Apotema:-** Una funzione lineare è completamente determinata dai valori che assume in due punti. La funzione lineare con

$f(x_1) = y_1$  e  $f(x_2) = y_2$  ha la forma  $f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$ .

Tonty!

**Tonty:-** Ha detto con me, prof?

**Apotema:-** No! Dicevo col compagno di banco del tuo compagno di banco!

**Tonty:-** Ma... sono io, prof!

**Apotema:-** Appunto! Su Tonty, tocca a te!

**Tonty:-** Una funzione esponenziale è completamente determinata dai valori che assume in due punti. La funzione esponenziale con  $f(x_1) = y_1$  e  $f(x_2) = y_2$  ha la forma

$$f(x) = y_1 \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}.$$

**Apotema:-** Su, Copy!

**Copy:-** Una funzione logaritmica è completamente determinata dai valori che assume in due punti. La funzione logaritmica con

$f(x_1) = y_1$  e  $f(x_2) = y_2$  ha la forma  $f(x) = (y_2 - y_1) \log_{\frac{x_2}{x_1}} \frac{x}{x_1} + y_1$ .

**Apotema:-** A te, Guasty!

**Guasty:-** Una funzione potenza è completamente determinata dai valori che assume in due punti. La funzione potenza con

$f(x_1) = y_1$  e  $f(x_2) = y_2$  ha la forma  $f(x) = y_1 \left( \frac{x}{x_1} \right)^{\log_{\frac{x_2}{x_1}} \frac{y_2}{y_1}}$ .

**Apotema:-** Una funzione lineare si dice pura se  $f(0) = 0$ . Una funzione lineare pura ha la forma  $f(x) = bx$ . Scopyr!

**Scopyr:-** Una funzione esponenziale si dice pura se  $f(0) = 1$ .

Una funzione esponenziale pura ha la forma  $f(x) = b^x$ .

**Apotema:-** Dormy! Dormy!! Dormy!!!

**Dormy:-** Arrivo, prof! Una funzione logaritmica si dice pura se  $f(1) = 0$ . Una funzione logaritmica pura ha la forma  $f(x) = \log_b x$ .

**Apotema:-** Lenty!

**Lenty:-** Una funzione potenza si dice pura se  $f(1) = 1$ . Una funzione lineare pura ha la forma  $f(x) = x^b$ .

**Apotema:-** Una funzione lineare pura con  $f(x_0) = y_0$  ha la forma

$f(x) = \frac{y_0}{x_0} x$ . Sekky!

**Sekky:-** Subito, professore! Una funzione esponenziale pura con  $f(x_0) = y_0$  ha la forma  $f(x) = y_0^{\frac{x}{x_0}}$ .

**Apotema:-** Mi sembra di avervi chiamato proprio tutti... Ormai la tabella è quasi completa. Una funzione logaritmica pura con  $f(x_0) = y_0$  ha la forma  $f(x) = y_0 \log_{x_0} x$ , mentre una funzione potenza pura con  $f(x_0) = y_0$  ha la forma  $f(x) = x^{\log_{x_0} y_0}$ .

**Bronty:-** Io non sono stato chiamato! E neanche Gioky e Scetty!

**Apotema:-** Che sbadato! Passiamo alla caratterizzazione in termini di causa ed effetto. Una funzione lineare pura è una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , monotona, per la quale l'effetto della somma è la somma degli effetti. In formule, per ogni coppia di numeri  $x_1$  e  $x_2$  si ha che  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ . Continua tu, Bronty!

**Bronty:-** Una funzione esponenziale pura è una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , monotona, per la quale l'effetto della somma è il prodotto degli effetti. In formule, per ogni coppia di numeri  $x_1$  e  $x_2$  si ha che  $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$ .

**Apotema:-** Tocca a te, Gioky!

**Gioky:-** Una funzione logaritmica pura è una funzione  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , monotona, per la quale l'effetto del prodotto è la somma degli effetti. In formule, per ogni coppia di numeri positivi  $x_1$  e  $x_2$  si ha che  $f(x_1x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ .

**Apotema -** E, per ultimo tu, Scetty!

**Scetty:-** Una funzione potenza pura è una funzione  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , monotona, per la quale l'effetto del prodotto è il prodotto degli effetti. In formule, per ogni coppia di numeri positivi  $x_1$  e  $x_2$  si ha che  $f(x_1x_2) = f(x_1)f(x_2)$ .

**Apotema:-** Concludiamo questa tabella ricordando che, usando opportunamente delle scale logaritmiche, i grafici delle funzioni, diventano rette. In altre parole, sostituendo una delle due variabili o entrambe con i loro logaritmi, le relazioni diventano lineari.

(E Apotema completa la tabella)

**Apotema:-** Sentiamo un po'... qual è il significato di  $3^{\sqrt{2}}$ ? Meglio ancora, come viene definito questo numero? Chi me lo sa dire? -

**Svelty:-** È il valore della funzione esponenziale  $f(x) = 3^x$  per  $x = \sqrt{2}$ !

**Bronty:-** Grazie!

**Apotema:-** E come si definisce la funzione esponenziale in base 3?

**Svelty:-** È la funzione esponenziale con  $f(0)=1$  e  $f(1)=3$ . Abbiamo infatti visto che una funzione esponenziale risulta completamente determinata dai valori che assume in due numeri. La richiesta che sia  $f(0)=1$  ci dice che si tratta di una funzione esponenziale pura, e quella che sia  $f(1)=3$  ci dice che si tratta della funzione esponenziale in base 3!

**Apotema:-** Ok, Svelty. E per arrivare alla rappresentazione

| FUNZIONI LINEARI                                                                                      | FUNZIONI ESPONENZIALI                                                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , monotone,<br>$P.A. \rightarrow P.A.$                         | $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , monotone,<br>$P.A. \rightarrow P.G.$                  |
| $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$                                       | $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$                                        |
| $f(x) = a + bx$                                                                                       | $f(x) = ab^x$                                                                                    |
| $\dots, c - d, c, c + d, \dots$<br>$f(x) = \frac{D}{d}(x - c) + C$<br>$\dots, C - D, C, C + D, \dots$ | $\dots, c - d, c, c + d, \dots$<br>$f(x) = CQ^{\frac{x-c}{d}}$<br>$\dots, CQ^{-1}, C, CQ, \dots$ |
| $f(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$                                                   | $f(x) = y_1 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}$                                |
| $f(x) = bx$                                                                                           | $f(x) = b^x$                                                                                     |
| $f(x) = \frac{y_0}{x_0} x$                                                                            | $f(x) = y_0^{\frac{x}{x_0}}$                                                                     |
| $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$                                                                      | $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$                                                                    |
| $y = a + bx$                                                                                          | $\log y = \log a + (\log b)x$                                                                    |

| FUNZIONI LOGARITMICHE                                                                                  | FUNZIONI POTENZE                                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , monotone,<br>$P.G. \rightarrow P.A.$                        | $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , monotone,<br>$P.G. \rightarrow P.G.$                                    |
| $f(\sqrt{x_1 x_2}) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$                                                        | $f(\sqrt{x_1 x_2}) = \sqrt{f(x_1) f(x_2)}$                                                                           |
| $f(x) = a + \log_b x$                                                                                  | $f(x) = ax^b$                                                                                                        |
| $\dots, cq^{-1}, c, cq, \dots$<br>$f(x) = D \log_q \frac{x}{c} + C$<br>$\dots, C - D, C, C + D, \dots$ | $\dots, cq^{-1}, c, cq, \dots$<br>$f(x) = C \left( \frac{x}{c} \right)^{\log_q Q}$<br>$\dots, CQ^{-1}, C, CQ, \dots$ |
| $f(x) = y_1 + (y_2 - y_1) \log_{\frac{x_2}{x_1}} \frac{x}{x_1}$                                        | $f(x) = y_1 \left( \frac{x}{x_1} \right)^{\log_{\frac{x_2}{x_1}} \frac{y_2}{y_1}}$                                   |
| $f(x) = \log_b x$                                                                                      | $f(x) = x^b$                                                                                                         |
| $f(x) = y_0 \log_{x_0} y$                                                                              | $f(x) = x^{\log_{x_0} y_0}$                                                                                          |
| $f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2)$                                                                         | $f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2)$                                                                                         |
| $y = a + \frac{1}{\log b} \log x$                                                                      | $\log y = \log a + b \log x$                                                                                         |

decimale di  $3^{\sqrt{2}}$  come si fa?

**Scetty:-** Tanto per cominciare possiamo trovare sempre e comunque soltanto un numero finito di cifre decimali. Il fatto importante è che, una volta fissato questo numero, in linea di principio possiamo arrivare a trovare quelle cifre. Ci basta usare l'algoritmo dell'inserimento dei medi.

**Apotema:-** Proprio così! Potete pensare che la vostra calcolatrice esegua ogni volta quell'algoritmo.

**Dubby:-** Mi viene da dire però che c'era anche un altro modo di dire che cos'è il numero  $3^{\sqrt{2}}$  ! È il valore della funzione potenza  $f(x) = x^{\sqrt{2}}$  calcolato in  $x = 3$  . Possiamo così usare l'algoritmo di inserimento dei medi per le funzioni potenze!

**Apotema:-** Giustissimo, Dubby! Per finire, vi chiedo di dirmi che cos'è il numero  $\log_5 19$  .

**Sekky:-** Considero la funzione che manda la progressione geometrica delle potenze di 5 nei loro esponenti e quindi la funzione logaritmica  $f$  con  $f(1)=0$  e  $f(5)=1$  . Allora  $\log_5 19 = f(19)$  e posso trovare il suo sviluppo decimale con un numero arbitrario di cifre usando l'algoritmo dell'inserimento dei medi.

**Apotema:-** Proprio così! Di fatto usiamo sempre e soltanto decimali finiti e con un numero piccolo di cifre decimali. Non avete mai pensato attentamente a questo fatto? Supponiamo di avere una calcolatrice che può rappresentare numeri con 8 cifre significative. Ecco che questi numeri si guardano bene dal riempire la retta reale! Si tratta di un numero finito di punti isolati sparsi in un intervallo finito. Proviamo a considerare soltanto quelli positivi. Come sono distribuiti? Ecco che tra 1 e 10 ce ne sono tanti quanti tra 10 e 100! Ma altrettanti ce ne sono tra 0.1 e 1! Insomma... sono distribuiti in modo logaritmico!

**Geny:-** È vero! Lo si capisce bene se si usa la calcolatrice in notazione esponenziale! Se fisso le 8 cifre per esempio 12345678, ecco che in corrispondenza del numero 1.2345678, ci sono anche i numeri  $12345678 \times 10^1$  ,  $12345678 \times 10^2$  ,  $12345678 \times 10^3$ ... e i numeri  $12345678 \times 10^{-1}$  ,  $12345678 \times 10^{-2}$  , ... Tanti quanti sono i diversi esponenti delle potenze di 10 che la calcolatrice consente di usare!

**Apotema:-** Vedete che, in fondo, i logaritmi sono nascosti anche nelle calcolatrici che si trovano in omaggio nel detersivo!

**Dubby:-** Ma allora i numeri della calcolatrice sono sempre più radi! Se la calcolatrice usa 8 cifre, allora ci sono 90 milioni di numeri diversi tra un decimillesimo e un millesimo, così come tra 10 miliardi e 100 miliardi!

**Apotema:-** Esattamente, Dubby! Quando l'ottava cifra aumenta di uno ecco che il numero aumenta di un centomilionesimo se è tra 0.1 e 1, ma soltanto di un miliardesimo tra 0.01 e 0.1, mentre aumenta di una unità tra 10 milioni e 100 milioni e di ben un milione tra 10'000 miliardi e 100'000 miliardi!

**Sogny:-** Lo sa, prof, che non ci avevo mai pensato?

**Apotema:-** Sono i vantaggi della scala logaritmica: hai la stessa precisione tanto nel piccolo quanto nel grande!

**Bronty:-** Prof, ma allora da domani viene Precisini?

**Apotema:-** Grazie, Bronty, per avermelo ricordato. Da domani verrà il dottor Precisini per farvi fare degli esercizi su tutto quello che abbiamo visto. Cercate di impegnarvi e, mi raccomando, comportatevi bene!

**Asy:-** Tranquillo, prof! Ce lo lavoriamo noi!



**LA BALLATA DELLE FUNZIONI LINEARI, ESPONENZIALI,  
LOGARITMICHE E POTENZE  
(Giorgio Goldoni)**

C'è una famiglia di quattro funzioni  
che ti ritrovi in tutti i cantoni.

Per questo motivo vale la pena  
che tu te le studi di buona lena.

Il modo migliore, detto in soldoni,  
è definirle con le progressioni.

Possiam partire dalle lineari,  
tanto le altre son poi tutte uguali!

Si tratta solo di fare attenzione  
a indovinar qual è la progressione

che devi usare in ingresso e in uscita  
se vuoi che  $f$  sia ben definita.

Dovrai aggiungere poi, attenzione,  
se vuoi partire con la bisezione

senza procedere alla "carlona",  
che la funzione sia monotona!

A questo punto le quattro funzioni  
son già definite senza eccezioni.

Aritmetiche in aritmetiche  
e aritmetiche in geometriche

son lineari ed esponenziali  
che puoi usar per guarir tutti i mali.

Usi le prime nel moto uniforme  
e del tuo punto segui le orme

mentre per le altre hai buon motivo  
col decadimento radioattivo.

Mandan geometriche in aritmetiche  
e infin geometriche in geometriche

le logaritmiche e le potenze  
che puoi usare anche senza licenze.

Tu usi le prime, non servono ore,  
e di una lastra trovi lo spessore

e con le altre non è più un mistero  
la terza legge del grande Keplero.

Ma non ti serve per ogni funzione  
usar l'algoritmo di bisezione:

a tutto pensa come una nutrice  
la tua scientifica calcolatrice.

Con i suoi tasti con log, exp e altro  
i tuoi bei calcoli puoi fare scaltro

e sol sul problema puoi concentrarti  
e lasciar perdere tortuose arti

che richiedevan l'uso di tavole  
che oggi a tutti sembrano favole!

Unico pregio è stato davvero  
ritrovare il numero di Nepero!

E delle quattro funzioni ora armato  
ogni andamento sarà smascherato.

Se trovi un tempo di dimezzamento  
oppure uno di raddoppiamento

senza alcun dubbio è scontato il finale:  
si tratta certo di un'esponenziale!

Potrai descrivere queste funzioni,  
quando son pure, con poche istruzioni

se introdurrai tu la causa e l'effetto  
che renderanno il discorso perfetto.

Riguardo ai grafici, lo dico in fretta,  
ogni funzione diventa una retta

se fare uso saprai, con del sale,  
di una o due logaritmiche scale!

Questa la storia tradotta in soldoni  
di queste mitiche quattro funzioni!



## **COLLANA *"Il professor Apotema insegna..."***

### **VOLUMI PUBBLICATI**

1. Le funzioni lineari, esponenziali, logaritmiche e potenze
2. I numeri iperreali
3. Il calcolo delle differenze e il calcolo differenziale
4. Il calcolo delle somme e il calcolo integrale
5. Le serie e gli integrali impropri
6. I numeri complessi del piano e dello spazio
7. Il linguaggio degli insiemi e dei predicati
8. La geometria del piano col metodo delle coordinate

### **VOLUMI DI PROSSIMA PUBBLICAZIONE**

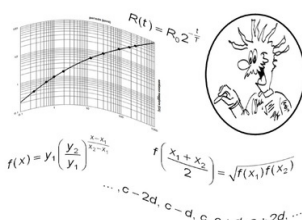
9. La geometria dello spazio col metodo delle coordinate
10. Il calcolo infinitesimale in più variabili
11. La trigonometria piana e sferica
12. Le equazioni alle differenze e le equazioni differenziali
13. L'analisi di Fourier

### **ALTRI LIBRI DELL'AUTORE**

Le lezioni del professor Apotema  
Persone che... contano!  
Le geometrie non euclidee

*Il professor Apotema insegna...*

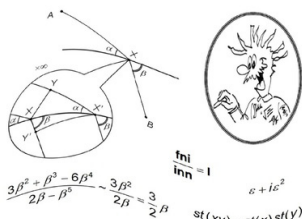
## LE FUNZIONI LINEARI ESPOENZIALI LOGARITMICHE E POTENZE



**Giorgio Goldoni**

*Il professor Apotema insegna...*

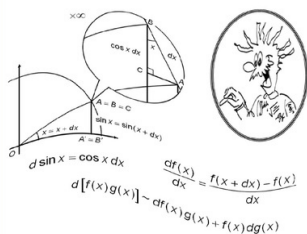
## I NUMERI IPERREALI



**Giorgio Goldoni**

*Il professor Apotema insegna...*

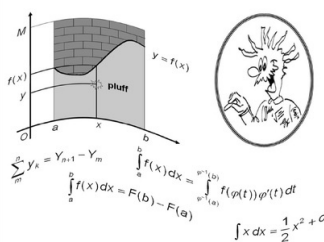
## IL CALCOLO DELLE DIFFERENZE E IL CALCOLO DIFFERENZIALE



**Giorgio Goldoni**

*Il professor Apotema insegna...*

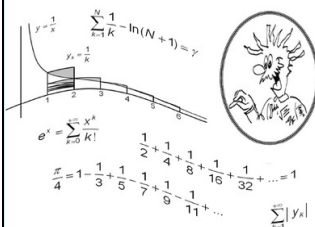
## IL CALCOLO DELLE SOMME E IL CALCOLO INTEGRALE



**Giorgio Goldoni**

*Il professor Apotema insegna...*

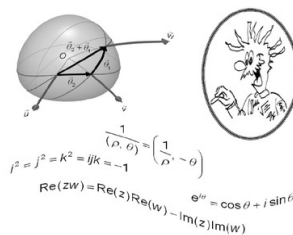
## LE SERIE E GLI INTEGRALI IMPROPRI



**Giorgio Goldoni**

*Il professor Apotema insegna...*

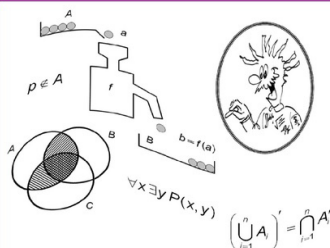
## I NUMERI COMPLESSI DEL PIANO E DELLO SPAZIO



**Giorgio Goldoni**

*Il professor Apotema insegna...*

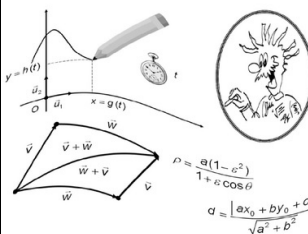
## IL LINGUAGGIO DEGLI INSIEMI E DEI PREDICATI



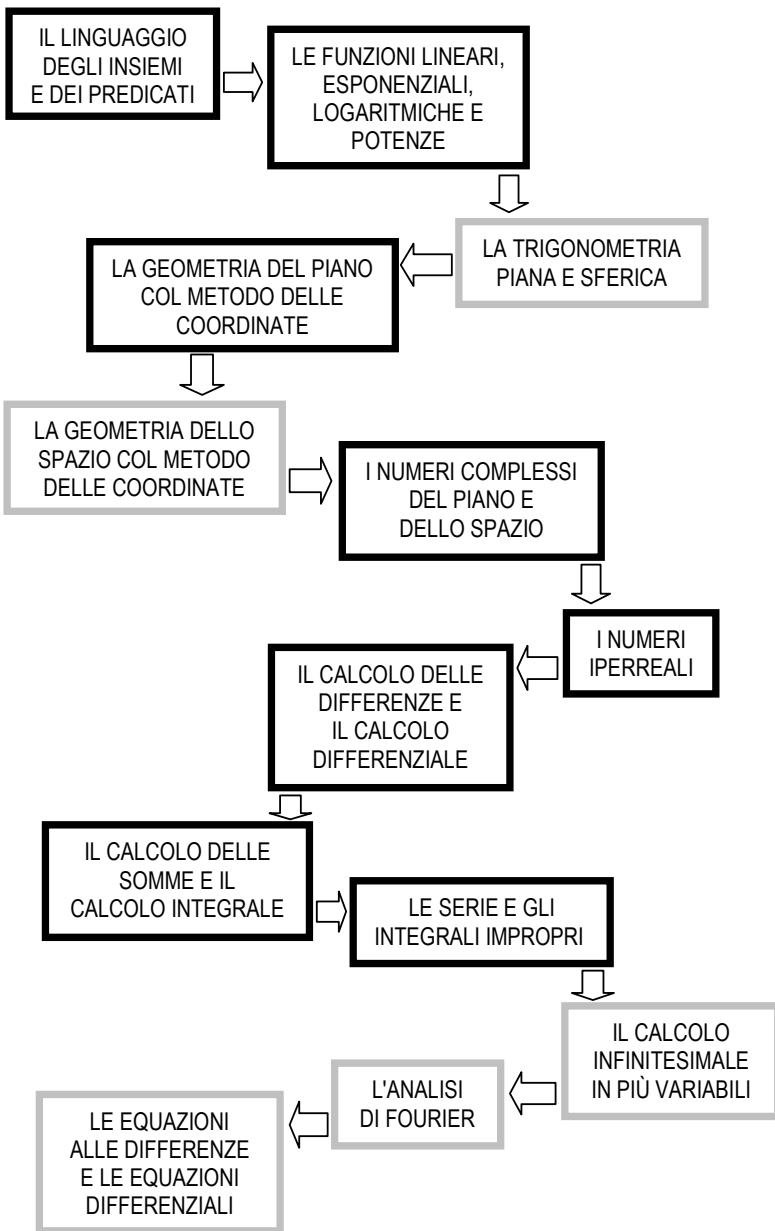
**Giorgio Goldoni**

*Il professor Apotema insegna...*

## LA GEOMETRIA DEL PIANO COL METODO DELLE COORDINATE



**Giorgio Goldoni**







Giorgio Goldoni insegna matematica nella scuola superiore e da oltre 25 anni è conferenziere al Civico Planetario "Francesco Martino" di Modena. Ha pubblicato articoli di varia indole di matematica, fisica e astronomia su riviste italiane e straniere.

**Ancora una volta il professor Apotema cercherà di convincere Sekky, Asy, Geny e il resto della classe che ha qualcosa di interessante da dire che merita la loro attenzione. In queste lezioni, più che al rigore espositivo, Apotema mira a fornire uno strumento concettuale che consenta di riconoscere alcune funzioni fondamentali nelle situazioni più disparate. Convinto che non esista il punto di vista migliore, ma soltanto prospettive differenti, Apotema presenta ai suoi studenti diverse definizioni equivalenti di ciascuna classe di funzioni. E questo non per fare un vuoto esercizio accademico, ma per favorire una percezione sempre più nitida dell'oggetto di studio. L'autore si è rivolto principalmente agli studenti di scuola superiore e confida in un giudizio benevolo da parte dei colleghi nonostante le molte libertà che si è preso nell'esposizione e nella terminologia. Non si cura invece di eventuali critiche riguardo allo stile scherzoso, facendosi scudo con le parole del grande Lewis Carroll: "Esistono senza dubbio discipline talmente serie da non potersi trattare con uno stile leggero, ma per fortuna non è questo il caso della matematica!"**